University of Namur

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Etude des variétés hilbertiennes et application à la mécanique quantique

Staelens, François

Award date:
2016

Awarding institution:
Universite de Namur

UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

ÉTUDE DES VARIÉTÉS HILBERTIENNES ET APPLICATION À LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Mémoire présenté pour l'obtention

du grade académique de master en sciences mathématiques à finalité approfondie

François STAELENS

Juin 2016

UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

ÉTUDE DES VARIÉTÉS HILBERTIENNES ET APPLICATION À LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Promoteur :

André FÜZFA

Mémoire présenté pour l'obtention

du grade académique de master en sciences mathématiques à finalité approfondie

François STAELENS

Juin 2016

Remerciements

Je tiens à remercier mon promoteur André Füzfa qui m'a fait découvrir ce sujet et m'a accompagné efficacement dans la réalisation de ce mémoire et de mon stage.

Je remercie également mes parents pour le soutien et les critiques pertinentes qu'ils m'ont fournis.

Merci à mes amis et à toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin dans cette longue aventure qui m'aura emporté jusqu'en Norvège.

Je remercie tout particulièrement Élodie qui m'a permis de garder ma motivation et mon envie tout au long de ces deux années de travail. Moi et mon mémoire lui devons énormément.

Abstract

La géométrie différentielle en dimension infinie n'est généralement pas enseignée dans les cours universitaires mais elle est parfaitement développée de manière théorique et globale. Toutefois, l'écriture locale et le calcul tensoriel semblent avoir été mis de côté au profit des résultats globaux. Les variétés hilbertiennes, variétés dont l'espace de représentation est un espace de Hilbert séparable, semblent pourtant pouvoir potentiellement jouer un rôle en physique théorique. La mécanique quantique utilise en effet des espaces de Hilbert, alors que la relativité générale est construite sur la géométrie riemannienne. Ceci motive l'étude des variétés hilbertiennes accomplie dans ce mémoire. Une présentation détaillée des concepts généraux de géométrie différentielle en dimension infinie est réalisée. De plus, ce travail s'intéresse de près à l'écriture locale et au calcul tensoriel. La plupart des formules tensorielles utilisées en géométrie différentielle et riemannienne sont développées dans le cas hilbertien. Pour terminer, une tentative d'application à la mécanique quantique est présentée. Cet essai fait ressortir un problème de fond : la mécanique quantique est profondément linéaire alors que la géométrie différentielle est, par nature, non linéaire. Ce mémoire est à la fois une étude bibliographique et une recherche exploratoire.

Mots clés : variété hilbertienne - dimension infinie - géométrie différentielle - mécanique quantique - champ vectoriel - représentation locale - espace tangent - espace de Hilbert - vecteur d'état

Infinite dimensional differential geometry is usually not taught in university courses but it is perfectly developed in a theoretical and global way. However, the local writing and the tensorial calculus do not seem to be promoted by comparison to global results. Hilbert manifolds, i.e. manifolds with Hilbert space as representation space, seem to potentially be able to play a role in theoretical physics. Indeed, quantum mechanics uses Hilbert spaces and general relativity is built on riemannian geometry. This motivates the study of Hilbert manifolds that is achieved in this master thesis. A detailed presentation of the general concepts of infinite dimensional differential geometry is realized. Moreover, this work is closed interested to infinite dimensional local writing and tensorial calculus. Most tensorial formulae used in differential and riemannian geometry are developed in the hilbertian case. Finally, an attempt of application to quantum mechanics is presented. That attempt reveals a deep problem : quantum mechanics is deeply linear while differential geometry is naturally non linear. This master thesis is both a bibliographic study and an exploratory research.

Key words : Hilbert manifold - infinite dimensional - differential geometry - quantum mechanics - vector field - local representation -tangent space - Hilbert space - state vector

Table des matières

Introduction

L'origine de la géométrie différentielle remonte au XIXe siècle avec la découverte de la géométrie non euclidienne par Gauss, Bolyai et Lobatchevsky. Vers 1830, Bolyai et Lobatchevsky, chacun de leur côté, publient leurs travaux respectifs concernant la géométrie hyperbolique. Gauss affirme dans une lettre adressée au père de Bolyai qu'il avait déjà découvert tout cela mais qu'il ne l'avait pas publié par peur des réactions que cela produirait [1].

En parallèle, en 1828, Gauss découvre son Theorema Egregium (ce qui se traduit par *théorème remarquable*), impliquant que la courbure gaussienne d'une surface ne dépend pas de la manière dont elle se trouve être plongée dans l'espace à 2 ou 3 dimensions. En d'autres termes, la courbure de Gauss ne dépend pas de la manière dont est paramétrée la surface.

Ces résultats permettent à Riemann, élève de Gauss, d'effectuer une avancée considérable vers la géométrie différentielle en faisant apparaître le concept de carte locale. En 1851, il étudie, dans sa thèse de doctorat, les fonctions de variables complexes qui le mèneront à développer les célèbres surfaces qui portent son nom. En 1854, sous l'impulsion de Gauss, son professeur, il réalise un célèbre exposé lors de la soutenance de son habilitation qui pose les bases de la géométrie différentielle moderne. Il y expose notamment les idées à l'origine des variétés différentiables, de la métrique riemannienne et de la courbure associée. Ces développements lui permettent de généraliser ces notions aux variétés de dimension n quelconque [2]. Par la suite, la géométrie différentielle de dimension finie ne cesse de se développer, notamment grâce aux travaux d'E. Cartan, H. Poincaré, R. Lipschitz, E.B. Christoffel, S. Lie, et de bien d'autres [3].

Selon [8], les variétés de dimension infinie étaient déjà mentionnées dans l'exposé de Riemann de 1854. Mais pour parler de variétés différentiables, il fallait d'abord développer le calcul différentiel en dimension infinie. Ce sont les travaux successifs de Volterra, Fréchet et Gâteaux qui ont permis développer les outils indispensables à cette discipline au début du XXe siècle (voir [5]). Il a néanmoins fallu du temps pour que la théorie des variétés de dimension infinie acquière des bases solides. Par exemple, dans un article de A. D. Michal [13], l'auteur dit *"[...] the author's researches during the period 1927-1931 on Riemannian and non-Riemannian geometries with coordinates in the space of real continuous functions of a real variable showed the need for simplifying generalizations and for a study of the foundations."* Ces fondations semblent avoir finalement été posées définitivement dans les années 1950-1960 avec les ouvrages de Bourbaki, celui de S. Lang [10] en 1962, le texte de J. Eells Jr [5] en 1966 et l'ouvrage de R. S. Palais [15] en 1968. Les deux principaux ouvrages sur lesquels nous nous basons dans ce mémoire, [7] de W.P.A. Klingenberg et [9] de S. Lang , ont été rédigés plus tard mais sont principalement basés sur ces ouvrages des années 1960.

La géométrie différentielle en dimension infinie est donc à la fois assez ancienne et récente puisqu'il a fallu attendre la deuxième partie du XXe siècle pour qu'elle soit bien définie et possède des fondations solides. Ce sujet n'est généralement pas étudié dans un cours de géométrie différentielle classique. Les variétés hilbertiennes, cas particulier de variété de dimension infinie, sont des objets relativement peu utilisés par les mathématiciens, mis à part les spécialistes du

1. Ce paragraphe est basé sur [17].
2. Ce paragraphe est basé sur [11].
3. Pour un historique plus complet de l'évolution de la notion de variété différentiable, nous renvoyons le lecteur vers [19].

sujet. Une raison de cet intérêt limité réside peut-être dans le fait qu'il existe peu d'utilisations de ces objets en physique théorique. En comparaison, les variétés riemanniennes de dimension finie sont un outil indispensable à la relativité générale. Cela leur a valu de susciter une grand intérêt parmi les théoriciens. Un autre exemple d'utilisation d'objets mathématiques en physique concerne les variétés symplectiques et leur application à la mécanique hamiltonienne. Les espaces de Hilbert ont également connu un immense intérêt de la part des mathématiciens et physiciens de par leur utilisation en mécanique quantique. Quoi qu'il en soit, même si elles ont été utilisées dans différents sujets, comme notamment les groupes de Lie de dimension infinie (voir par exemple [2]), les espaces de lacets des variétés différentiables (voir [12]) ou encore la théorie de Morse (voir [16]), les variétés de dimension infinie restent encore peu connues pour de nombreux mathématiciens.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier ces variétés hilbertiennes et de les présenter de manière claire et précise. La grande innovation de ce travail consiste dans le développement presque systématique de l'écriture locale des résultats et du calcul tensoriel. Les ouvrages cités plus haut s'intéressent à l'analyse globale des variétés, l'écriture locale en composantes n'y est jamais abordée par souci de généralité. En effet, l'espace de représentation d'une variété peut-être très varié : il peut aussi bien être un espace de fonctions qu'un espace de suites, ou encore autre chose. Cela rend difficile la représentation locale générale, d'autant plus que ces ouvrages considèrent souvent le cas banachien plutôt que le cas hilbertien. Notre apport personnel réside donc dans une étude du cas hilbertien avec une particularisation au cas où l'espace de représentation est $l^2(\mathbb{R})$. Dans cette optique, une variété hilbertienne semble s'apparenter à une variété de dimension n où n tend vers l'infini. Il s'agit en effet d'une variété où les cartes locales donnent une infinité dénombrable de composantes. Intuitivement, nous serions tenté d'écrire les mêmes résultats qu'en dimension finie, mais en remplaçant à chaque fois toutes les sommations de 1 à n par des séries infinies. Ce mémoire aura pour but de déterminer si le passage à la dimension infinie peut s'effectuer de manière aussi directe dans l'écriture locale et, si oui, dans quelles conditions.

Une fois que nous aurons réalisé cette étude théorique, nous verrons dans quelle mesure nous pouvons utiliser ces objets en physique théorique. L'application que nous envisagerons dans ce mémoire concerne la mécanique quantique. Cette discipline est fondée mathématiquement sur l'analyse fonctionnelle et les espaces de Hilbert. La notion de variété pourrait permettre d'apporter une généralisation de cette théorie en incorporant la notion de représentation locale.

Ce travail se divise en quatre chapitres. Le Chapitre 1 contient des rappels de géométrie différentielle de dimension finie, ainsi que d'analyse fonctionnelle. Ces deux sujets, étudiés systématiquement à l'université, sont nécessaires à la compréhension du reste du mémoire et sont présentés de manière aussi auto-suffisante que possible pour un lecteur maîtrisant les concepts basiques de l'analyse réelle et de l'algèbre. Le Chapitre 2 présente le calcul différentiel en dimension infinie, et plus précisément sur des espaces de Hilbert séparables. Nous y définissons notamment la différentiabilité de Fréchet et les notions d'espaces tangent et cotangent d'espaces de Hilbert. Ces deux notions sont cruciales dans la définition des espaces tangent et cotangent des variétés hilbertiennes. Le Chapitre 3 est la partie centrale de ce mémoire. Nous y présentons les variétés hilbertiennes et tous les concepts de géométrie différentielle en dimension infinie. La plupart du temps, l'exemple de $l^2(\mathbb{R})$ est présenté avec son écriture locale. Les titres des sections de ce chapitre sont très similaires à ceux du Chapitre 1 puisque nous étudions les mêmes concepts et que seule la dimension change. Le Chapitre 4 expose une tentative de généralisation géométrique de la mécanique quantique par l'utilisation de variétés hilbertiennes. Les résultats de cette géométrisation révèlent une incompatibilité profonde entre mécanique quantique et géométrie différentielle. En effet, la linéarité est un concept central en mécanique quantique alors que la non linéarité est au coeur de la géométrie différentielle. Le titre de l'ouvrage de R.S. Palais [15] l'illustre bien puisqu'il s'intitule *Foundations of Global Non-Linear Analysis*. Le mariage entre mécanique quantique et géométrie différentielle n'est donc pas évident mais pose de nombreuses questions intéressantes sur l'essence de ces disciplines.

Hormis la Section 4.1 qui est constituée de rappels de mécanique quantique, le Chapitre 4 est une contribution entièrement personnelle. Les idées et notions qui y sont exposées sont, à notre connaissance, entièrement originales. Concernant les Chapitres 2 et 3, le travail est en partie bibliographique car les concepts qui y sont présentés ne sont pas neufs. Mais notre contribution se situe, en plus du fait d'avoir réalisé une présentation synthétique de ces notions, dans le développement d'exemples et la démonstration de nombreux résultats. Toutes les démonstrations de ce mémoire ont été réalisées par l'auteur, sauf mention explicite du contraire.

Chapitre 1

Rappels de géométrie différentielle en dimension finie et d'analyse fonctionnelle

Ce mémoire fait naturellement appel à de nombreuses notions de mathématiques de niveau universitaire. Nous nous devons donc d'en présenter les principales en guise de rappel. Toutefois, nous considérons acquises toutes les notions élémentaires des mathématiques vues dans l'enseignement secondaire, ainsi que celles issues de l'algèbre linéaire et de l'analyse réelle.

Dans la première partie de ces rappels, nous donnons les principaux concepts de la géométrie différentielle réelle de dimension finie. La deuxième partie est, quant à elle, dédiée à l'analyse fonctionnelle et les espaces de Hilbert. Ces deux sections ne constituent pas une théorie complète de ces sujets mais sont présentes en raison de l'importance prépondérante de ces deux sujets dans ce mémoire. En effet, tous les concepts de géométrie différentielle en dimension finie seront étudiés pour être comparés avec ceux du cas de la dimension infinie, présentés dans le Chapitre 3. D'autre part, l'analyse fonctionnelle est la pierre angulaire de la mécanique quantique, sujet d'application du Chapitre 4. Nous conseillons au lecteur n'ayant jamais abordé ces notions de les découvrir dans d'autres ouvrages davantage portés sur le sujet car les rappels de ce chapitre ont été volontairement condensés.

1.1 Géométrie différentielle

Nous effectuons des rappels issus de [6] et [14]. Il s'agit de notions concernant les variétés modelées sur $\mathbb{R}^n$, donc de dimension finie. Les chapitres suivants porteront par contre sur l'étude des variétés de dimension infinie. Tous les concepts seront réintroduits plus tard de manière générale, et parfois un peu différemment, mais nous tenterons le plus souvent possible de les mettre en parallèle avec ce que nous avons défini dans cette section.

1.1.1 Variétés et applications entre variétés

Nous commençons par définir une variété différentiable de dimension n.

Définition 1.1.1. *M est une* VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE *de dimension n si*
(1) M est un espace topologique séparé ;
(2) M possède un ATLAS DIFFÉRENTIABLE.

Un atlas différentiable de M est une famille de CARTES LOCALES $(u_\alpha, M_\alpha)_{\alpha\in A}$ *(A est un index quelconque), telles que*

— $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ *est un recouvrement d'ouverts de M.*

— *pour tout* $\alpha \in A$, $u_\alpha : M_\alpha \to U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, *où* $U_\alpha := u_\alpha(M_\alpha)$ *est un ouvert, est un homéomorphisme. Les* u_α *sont appelées* FONCTIONS DE COORDONNÉES.
— *si* $M_{\alpha\beta} := M_\alpha \cap M_\beta$, $U_{\alpha\beta} := u_\alpha(M_{\alpha\beta})$ *et* $U_{\beta\alpha} := u_\beta(M_{\alpha\beta})$,
alors $u_\beta \circ u_\alpha^{-1} : U_{\alpha\beta} \to U_{\beta\alpha}$ *est* C^∞.

Nous attirons l'attention sur le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable. En effet, l'unique carte $(\mathbb{R}^n, Id)$, où $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est l'identité, constitue un atlas différentiable de $\mathbb{R}^n$. Il s'agit de la variété triviale de dimension n.
Nous enchainons avec le calculus sur les variétés différentiables.

Définition 1.1.2. *Soient M une variété de dimension m et N une variété de dimension n. Alors $f : M \to N$ est une application* DIFFÉRENTIABLE *si, pour toute carte (U, ϕ) de M et (V, ψ) de N (tel que $f(U) \subset V$), l'application $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$, soit la représentation en coordonnées de f dans ces cartes, est C^∞.*

Un premier cas particulier de cette définition est le difféomorphisme.

Définition 1.1.3. *Soit $f : M \to N$ un homéomorphisme. Si $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est inversible et si $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ ainsi que son inverse sont C^∞, alors f est un* DIFFÉOMORPHISME.
Dans ce cas, N est dit DIFFÉOMORPHE *à M.*

Une conséquence de cette définition est que deux variétés difféomorphes ont la même dimension. Un deuxième cas particulier d'application entre variétés est le champ scalaire.

Définition 1.1.4. *Soit M une variété de dimension n.*
Alors $f : M \to \mathbb{R}$ est appelée un CHAMP SCALAIRE *si f est une application différentiable.*
Nous notons l'ensemble des champs scalaires sur M par $\mathcal{F}(M)$.

Un troisième cas particulier est la courbe.

Définition 1.1.5. *S'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < 0 < b$ et si $c :]a, b[\to M$ est une application différentiable, alors c est appelée une* COURBE OUVERTE *dans M.*
La représentation en coordonnées de la courbe c dans la carte (U, ϕ), $C = \phi \circ c$, est appelée une REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE *de c.*

1.1.2 Vecteurs, espace tangent et champs vectoriels

Nous pouvons définir les vecteurs tangents en un point de la variété. Considérons $p \in M$ un point d'une variété de dimension n.

Définition 1.1.6. *Un* VECTEUR TANGENT *au point p de M est une application $X_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{aligned} X_p(\alpha f + \beta g) &= \alpha X_p(f) + \beta X_p(g) \\ X_p(fg) &= X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g), \end{aligned}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Si nous nous donnons une carte (U, ϕ) couvrant p, de coordonnées locales $\{x^1, \ldots, x^n\}$, alors tout vecteur tangent en p s'écrit

$$X_p = \sum_{\mu=1}^{n} X_p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p,$$

où, pour tout $\mu \in \{1, \ldots, n\}$, $X_p^\mu \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p : \mathcal{F}(m) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p f := \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})(a^1, \ldots, a^n)}{\partial a^\mu}\Big|_{(a^1, \ldots, a^n) = \phi(p)}. \end{aligned}$$

Définition 1.1.7. *L'ensemble des vecteurs tangents en p est appelé l'*ESPACE TANGENT *de M en p. Il est noté T_pM.*

L'espace tangent en p est un espace vectoriel. Dans la carte (U, ϕ), sa base est $\left\{ e_{\mu_p} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p \right\}_{\mu=1}^n$. Avec ces notations, nous pouvons donc écrire

$$X_p(f) = \sum_{\mu=1}^n X_p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p f.$$

Or, $X_p(f)$ ne peut dépendre de la carte considérée. Si (V, ψ) est une autre carte de coordonnées locales $\{y^1, \ldots, y^n\}$, alors nous pouvons écrire le vecteur X_p, dans ce nouveau jeu de coordonnées, sous la forme

$$X_p = \sum_{\alpha=1}^n \tilde{X}_p^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big|_p.$$

Nous avons donc

$$X_p(f) = \sum_{\mu=1}^n X_p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p f = \sum_{\alpha=1}^n \tilde{X}_p^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big|_p f.$$

Par les règles de dérivation habituelles,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big|_p f &= \frac{\partial (f \circ \psi^{-1})(a^1, \ldots, a^n)}{\partial a^\alpha}\Big|_{(a^1,\ldots,a^n)=\phi(p)} \\
&= \frac{\partial ((f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1}))(a^1, \ldots, a^n)}{\partial a^\alpha}\Big|_{(a^1,\ldots,a^n)=\phi(p)} \\
&= \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})(a^1, \ldots, a^n)}{\partial a^\mu}\Big|_{(a^1,\ldots,a^n)=\phi(p)} \frac{\partial ((\phi \circ \psi^{-1})^\mu)(b^1, \ldots, b^n)}{\partial b^\alpha}\Big|_{(b^1,\ldots,b^n)=\psi(p)} \\
&= \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p f \; \frac{\partial ((\phi \circ \psi^{-1})^\mu)(b^1, \ldots, b^n)}{\partial b^\alpha}\Big|_{(b^1,\ldots,b^n)=\psi(p)}.
\end{aligned}$$

Si nous utilisons la notation $(\phi \circ \psi^{-1})(y^1, \ldots, y^n) = (x^1(y^1, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, \ldots, y^n))$, nous pouvons écrire

$$\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big|_p f = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\Big|_p \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p f.$$

Il s'agit d'un abus d'écriture mais les physiciens s'en servent souvent pour alléger les notations. Toujours dans ces notations, nous obtenons finalement

$$\tilde{X}_p^\alpha = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\Big|_p X_p^\mu. \tag{1.1.1}$$

Cette formule est dans le sens contraire de celle des vecteurs de base. C'est pourquoi elles sont appelées coordonnées *contravariantes*.

Définition 1.1.8. *Considérons une courbe $c :]a, b[\to M$. Alors le vecteur tangent en $p = c(0)$ le long de la courbe c est le vecteur $X_p \in T_pM$ tel que*

$$X_p(f) = \frac{df(c(t))}{dt}\Big|_{t=0},$$

pour tout $f \in \mathcal{F}(M)$.

Dans les coordonnées $\{x^\mu\}$, nous avons

$$\frac{df(c(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p f \; \frac{dx^\mu(t)}{dt}\Big|_{t=0},$$

où $\{x^\mu(t)\}$ est la représentation de la courbe $c(t)$. Nous avons donc que les composantes du vecteur tangent le long de la courbe sont données par

$$X_p^\mu = \frac{dx^\mu(t)}{dt}\Big|_{t=0}. \tag{1.1.2}$$

De cette manière, les vecteurs tangents peuvent être définis comme des classes d'équivalence de courbes [1].

Maintenant que nous avons défini les vecteurs tangents, nous définissons les champs vectoriels.

Définition 1.1.9. *Un* CHAMP VECTORIEL *est une application*

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow \bigcup_{q\in M} T_qM \\ p &\mapsto X_p \in T_pM. \end{aligned}$$

Nous notons l'ensemble des champs vectoriels par $\chi(M)$.

Soient f un champ scalaire et X un champ vectoriel. Alors $X(f)$ est un champ scalaire défini par $(X(f))(p) = X_p(f)$. Par la Définition 1.1.6, nous avons donc que $\chi(M)$ est l'ensemble des dérivations sur $\mathcal{F}(M)$.

Un exemple important est le crochet de Lie de deux champs : pour tout $X, Y \in \chi(M)$, $[X,Y] \in \chi(M)$ est défini par

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

pour tout $f \in \mathcal{F}(M)$.

1.1.3 Covecteurs, espace cotangent et champs de covecteurs

Dans la section précédente, nous avons défini l'espace tangent T_pM en un point p de la variété. Nous avons également signalé qu'il s'agissait d'un espace vectoriel de base $\left\{ e_{\mu p} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p \right\}$ dans une carte de coordonnées $\{x^\mu\}$.

Définition 1.1.10. *Un* COVECTEUR *(ou* 1-FORME DIFFÉRENTIELLE*) en p est une forme linéaire sur T_pM. Autrement dit, l'ensemble des covecteurs T_p^*M est le dual algébrique (et topologique) de T_pM. T_p^*M est appelé l'*ESPACE COTANGENT *en p de M.*

Soit le couplage $\langle,\rangle : T_pM \times T_p^*M \rightarrow \mathbb{R}$ entre un primal et son dual, défini par $\langle X_p, \omega_p\rangle := \omega_p(X_p)$. Soient f un champ scalaire et $df_p = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p f \; dx_p^\mu$ sa différentielle en p. Alors, df_p est un covecteur en p défini par

$$\langle X_p, df_p\rangle = X_p(f) \quad \forall X_p \in T_pM.$$

La base duale de $\{e_{\mu p}\}$ est $\{dx_p^\mu\}$, toujours dans les coordonnées $\{x^\mu\}$.

1. Deux courbes vérifient la relation d'équivalence si le vecteur tangent le long de la première courbe est égal au vecteur tangent le long de la seconde courbe.

Soient un covecteur en p, noté ω_p, et deux jeux de coordonnées $\{x^\mu\}$ et $\{y^\alpha\}$. Supposons que ses deux représentations associées soient $\sum_{\mu=1}^n \omega_{\mu_p} dx_p^\mu$ et $\sum_{\alpha=1}^n \tilde{\omega_{\alpha p}} dy_p^\alpha$. Alors nous avons que

$$\tilde{\omega_{\alpha p}} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\Big|_p \omega_{\mu_p}. \tag{1.1.3}$$

Pour le voir, il suffit d'utiliser la formule (1.1.1) dans le couplage vecteur-covecteur. Ces coordonnées sont appelées *covariantes* car elles se transforment dans le même sens que les vecteurs de base.

Définition 1.1.11. *Un* CHAMP DE COVECTEURS *(ou de 1-formes) est une application*

$$\begin{aligned} \omega : M &\to \bigcup_{q \in M} T_q^* M \\ p &\mapsto \omega \in T_p^* M. \end{aligned}$$

Nous notons l'ensemble des champs de covecteurs par $\Omega^1(M)$.

1.1.4 Tenseurs et champs tensoriels

Avec les vecteurs et covecteurs, nous pouvons définir les tenseurs généraux. A partir de maintenant, nous utiliserons, dans ces rappels de géométrie, la convention d'Einstein concernant les indices répétés : si dans une même expression se trouve le même indice "en haut" et "en bas", alors cela signifiera que nous sommons sur cet indice de 1 à n. Par exemple, un champ vectoriel s'écrira $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ mais il faudra comprendre $X = \sum_{\mu=1}^n X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Définition 1.1.12. *Un* TENSEUR *de type* (r, s) *est une application multi-linéaire à* $r + s$ *arguments qui envoie* r *covecteurs et* s *vecteurs sur un réel, c'est-à-dire*

$$T : \times^r T_p^* M \times^s T_p M \to \mathbb{R}.$$

Nous l'écrivons, dans les coordonnées $\{x^\mu\}$,

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\nu_1 \dots \nu_s} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\nu_s},$$

où $\otimes$ *est le produit tensoriel. Concrètement, si nous prenons* r *covecteurs* $\omega_1, \ldots, \omega_r \in T_p^* M$ *et* s *vecteurs* $X_1, \ldots, X_r \in T_p M$*, alors nous avons*

$$T(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s) = T^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\nu_1 \dots \nu_s} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}, \omega_1 \right\rangle \ldots \left\langle \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}}, \omega_r \right\rangle \langle X_1, dx^{\nu_1} \rangle \ldots \langle X_s, dx^{\nu_s} \rangle.$$

L'ensemble des tenseurs (r, s) *au point* p *est noté* $T^r_{s\,p} M$.

Remarquons que nous n'avons plus indiqué le p à chaque fois pour ne pas surcharger les notations. Mais il faut garder à l'esprit qu'il devrait en réalité toujours être mentionné si nous voulions être vraiment rigoureux. Remarquons également que, par définition, nous avons que $T^1_{0\,p} M = T_p M$ et $T^0_{1\,p} M = T_p^* M$.

Considérons une seconde carte de coordonnées $\{y^\alpha\}$ dans laquelle nous avons

$$T = \tilde{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}{}_{\beta_1 \dots \beta_s} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\alpha_r}} \otimes dy^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes dy^{\alpha_s},$$

alors

$$\tilde{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}{}_{\beta_1 \dots \beta_s} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{\mu_r}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_s}}{\partial y^{\beta_s}} T^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\nu_1 \dots \nu_s}. \tag{1.1.4}$$

Cette formule permet de voir que, si un tenseur est nul dans une carte, alors il est nul dans toutes les autres cartes.

Définition 1.1.13. *Un* CHAMP TENSORIEL *de type* (r, s) *est une application*

$$\begin{aligned} T : M &\to \bigcup_{q \in M} T^r_{s\,q}M \\ p &\mapsto T_p \in T^r_{s\,p}M. \end{aligned}$$

1.1.5 Pushforward et pullback

Définition 1.1.14. *Soit une application différentiable* $f : M \to N$ *entre deux variétés. Cette application induit une application entre les espaces tangents respectifs définie, pour tout* $p \in M$, *par*

$$\begin{aligned} f_* : T_pM &\to T_{f(p)}N \\ X &\mapsto f_*X \end{aligned}$$

telle que, pour tout $g \in \mathcal{F}(N)$,

$$(f_*X)(g) := X(g \circ f).$$

L'application f_* *est appelée le* PUSHFORWARD *de* f, *ou encore l'*APPLICATION TANGENTE INDUITE.

En termes de composantes, nous avons, en prenant les coordonnées $\{x^\mu\}$ pour la carte de M et $\{y^\alpha\}$ pour la carte de N,

$$(f_*X)^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} X^\mu,$$

où $\{y^\alpha = y^\alpha(f(x^\mu))\}$ est la représentation en coordonnées de f.

Définition 1.1.15. *L'application* f *induit une application*

$$\begin{aligned} f^* : T^*_{f(p)}N &\to T^*_pM \\ \omega &\mapsto f^*\omega \end{aligned}$$

telle que, pour tout vecteur $X \in T_pM$, *nous avons*

$$\langle X, f^*\omega\rangle = \langle f_*X, \omega\rangle. \tag{1.1.5}$$

L'application f^* *est appelée le* PULLBACK *de* f, *ou encore l'*APPLICATION COTANGENTE INDUITE. *Algébriquement, il s'agit de l'application transposée de* f_*.

En termes de composantes, nous avons, dans les mêmes notations que pour le pushforward,

$$(f^*\omega)_\mu = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \omega_\alpha.$$

1.1.6 Fibrés tangent et cotangent, espaces fibrés

Soit M une variété. Considérons l'ensemble

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

ainsi que la projection

$$\begin{aligned} \pi : TM &\to M \\ X \in T_pM &\mapsto p. \end{aligned}$$

Cet ensemble TM est une variété différentiable. En effet, si $\mathcal{A} = \{(M_\alpha, u_\alpha), \alpha \in A\}$ est un atlas de M, alors $\left\{(\pi^{-1}(M_\alpha), \psi_\alpha), \alpha \in A\right\}$ est un atlas de TM si nous définissons ses fonctions de coordonnées par

$$\begin{array}{rcl} \psi_\alpha : \pi^{-1}(M_\alpha) & \rightarrow & u_\alpha(M_\alpha) \times \mathbb{R}^n \\ X_p \in T_pM & \mapsto & (u_\alpha(p), X_p^1, \ldots, X_p^n), \end{array}$$

où $\{X_p^\mu\}$ sont les coordonnées de X_p dans la carte (M_α, u_α). L'espace (TM, π) muni de sa structure de variété est appelé le *fibré tangent* de M. Il s'agit d'une variété de dimension $2n$.

Similairement, nous définissons le fibré cotangent. Soit

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

muni de la projection

$$\begin{array}{rcl} \pi : T^*M & \rightarrow & M \\ \omega_p \in T_p^*M & \mapsto & p. \end{array}$$

Alors (T^*M, π) possède une structure de variété. En effet, si $\mathcal{A} = \{(M_\alpha, u_\alpha), \alpha \in A\}$ est un atlas de M, alors $\left\{(\pi^{-1}(M_\alpha), \psi_\alpha), \alpha \in A\right\}$ est un atlas de T^*M si nous définissons ses fonctions de coordonnées par

$$\begin{array}{rcl} \psi_\alpha : \pi^{-1}(M_\alpha) & \rightarrow & u_\alpha(M_\alpha) \times \mathbb{R}^n \\ \omega_p \in T_p^*M & \mapsto & (u_\alpha(p), \omega_{1p}, \ldots, \omega_{np}), \end{array}$$

où $\left\{\omega_{\mu_p}\right\}$ sont les coordonnées de ω_p dans la carte (M_α, u_α). L'espace (T^*M, π) muni de sa structure de variété est appelé le *fibré cotangent* de M. Il s'agit d'une variété de dimension $2n$.

Nous définissons maintenant le concept général d'espace fibré.

Définition 1.1.16. *Un* ESPACE FIBRÉ *est un quadruplet (E, M, π, F) où*

- *E est une variété appelée l'*ESPACE TOTAL *;*
- *M est une variété appelée l'*ESPACE DE BASE *;*
- *$\pi : E \rightarrow M$ est une application lisse et surjective appelée la* PROJECTION *;*
- *F est un ensemble tel que, pour tout $p \in M$, $F_p := \pi^{-1}(p) \cong F$ ($\cong$ signifie « est isomorphe à ») et est appelé la* FIBRE.

Dans le cas où la fibre est un espace vectoriel, l'espace fibré est appelé FIBRÉ VECTORIEL.
Une SECTION *d'un espace fibré est une application $s : M \rightarrow E$ telle que, pour tout $p \in M$, nous avons $\pi(s(p)) = p$, càd $s(p) \in F_p$.*

Nous constatons que les fibrés tangent et cotangent sont des cas particuliers de fibrés vectoriels. De plus, les champs vectoriels sont les sections du fibré tangent alors que les champs de covecteurs sont les sections du fibré cotangent. Cette manière de voir les choses est importante car la généralisation en dimension infinie se fera via ces concepts.

1.1.7 Connexion

Nous désirons introduire un transport parallèle pour les vecteurs des variétés. Pour cela, nous devons d'abord définir une connexion. A partir d'ici, nous dénotons les vecteurs de base $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ par ∂_μ.

Définition 1.1.17. *Une* connexion affine *(ou* linéaire*) est une application*

$$\begin{aligned}\nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (x, y) &\mapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

qui vérifie

$$\begin{aligned}&(1) \quad \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z; \\ &(2) \quad \nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z; \\ &(3) \quad \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y; \\ &(4) \quad \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y,\end{aligned}$$

pour tout $X, Y, Z \in \chi(M), f \in \mathcal{F}(M)$.

Soient $p \in M$ et (U, ϕ) une carte couvrant p, de coordonnées $\{x^\mu\}$. Soient les vecteurs de bases $\{e_\mu\}$. Les coefficients de connections ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$ sont définis comme étant les composantes de $\nabla_{e_\mu} e_\nu$:

$$\nabla_\mu e_\nu := \nabla_{e_\mu} e_\nu = {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} e_\lambda.$$

Par conséquent, en vertu des quatre propriétés que doit vérifier une connexion, nous avons que

$$\nabla_X Y = X^\mu (\nabla_\mu Y)^\alpha e_\alpha = X^\mu (\partial_\mu Y^\alpha + Y^\nu {\Gamma^\alpha}_{\mu\nu}) e_\alpha.$$

En conclusion,

$$(\nabla_\mu Y)^\alpha = \partial_\mu Y^\alpha + Y^\nu {\Gamma^\alpha}_{\mu\nu}. \tag{1.1.6}$$

Nous remarquons que, dans ces développements, nous utilisons des vecteurs au lieu de champs vectoriels. Ce n'est pas un problème puisqu'un vecteur n'est jamais qu'un champ vectoriel évalué en un point de la variété. Si nous voulions être très formels, nous devrions préciser que le champ $\nabla_X Y$ est défini point par point par $(\nabla_X Y)_p = \nabla_{X_p} Y_p$, où l'indice p signifie l'évaluation en p. Ainsi, tout le développement que nous venons d'effectuer est cohérent avec la définition de connexion. Dans la suite de ces rappels, nous ferons souvent l'amalgame entre tenseurs et champs tensoriels, bien que ces objets soient de natures différentes. Le passage de l'un à l'autre est toutefois immédiat, c'est pourquoi nous nous autorisons cet abus de langage.

Nous allons maintenant étendre la connexion à n'importe quel type de tenseur. Pour un champ scalaire f, nous posons $\nabla_X f := X(f)$, pour tout champ vectoriel X. Pour les 1-formes, nous introduisons la règle de Leibniz suivante

$$\nabla_X(\langle Y, \omega\rangle) := \langle \nabla_X Y, \omega\rangle + \langle Y, \nabla_X \omega\rangle,$$

pour tout $X, Y \in \chi(M)$, $\omega \in \Omega^1(M)$. Grâce à cela, nous pouvons en déduire que

$$(\nabla_\mu \omega)_\alpha = \partial_\mu \omega_\alpha - {\Gamma^\beta}_{\mu\alpha} \omega_\beta. \tag{1.1.7}$$

En particulier, nous avons $\nabla_\mu dx^\alpha = -{\Gamma^\alpha}_{\mu\beta} dx^\beta$ pour les 1-formes de base.

Pour un tenseur quelconque, la connexion est définie par récurrence grâce à une règle de Leibniz que nous introduisons pour le produit tensoriel. Soient T_1, T_2 deux tenseurs quelconques. Alors, nous définissons

$$\nabla_\mu(T_1 \otimes T_2) := (\nabla_\mu T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_\mu T_2).$$

De cette règle, nous pouvons calculer que, si T est un tenseur de type (r, s), tel que

$$T = {T^{\mu_1 \ldots \mu_r}}_{\nu_1 \ldots \nu_s} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\nu_s}$$

dans les coordonnées $\{x^\mu\}$, alors $\nabla_\lambda T$ est aussi un tenseur (r,s) et

$$(\nabla_\lambda T)^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_s} = \partial_\lambda T^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_s} + \Gamma^{\mu_1}{}_{\lambda\alpha} T^{\alpha\mu_2\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_s} + \ldots + \Gamma^{\mu_r}{}_{\lambda\alpha} T^{\mu_1\ldots\mu_{r-1}\alpha}{}_{\nu_1\ldots\nu_s}$$
$$-\Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu_1} T^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\alpha\nu_2\ldots\nu_s} - \ldots - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu_s} T^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}\alpha}.$$

Jusqu'ici nous avons toujours travaillé dans le même système de coordonnées $\{x^\mu\}$. Mais les coefficients de connexion dépendent de ces coordonnées. Nous allons donner la formule de transformation de ces coefficients. Considérons un autre système de coordonnées $\{y^\alpha\}$ et écrivons $\tilde{\Gamma}^\gamma{}_{\alpha\beta}$ les coefficients de connexion associés. Alors, nous avons

$$\tilde{\Gamma}^\gamma{}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\nu}. \tag{1.1.8}$$

Les coefficients de connexion ne forment donc pas un système tensoriel.

Nous introduisons la notion de transport parallèle et de géodésique.

Définition 1.1.18. *Soit $c :]a,b[\to M$ une courbe et soit le système de coordonnées $\{x^\mu\}$. Considérons un champ vectoriel X le long de c.*
Alors, si $\nabla_V X = 0$ pour tout $t \in]a,b[$, où V est le champ des vecteurs tangents le long de la courbe c, X est dit TRANSPORTÉ PARALLÈLEMENT LE LONG DE c.

Une courbe c est une GÉODÉSIQUE *si le champ de vecteurs tangents le long de cette courbe est transporté parallèlement le long de c, càd si $\nabla_V V = 0$ pour tout $t \in]a,b[$.*

Si nous écrivons $V_{c(t)} = \frac{dx^\mu}{dt}\Big|_{c(t)} e^\mu\Big|_{c(t)}$ (voir la Définition 1.1.8), alors les composantes d'une géodésique sont solutions de l'équation

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = 0. \tag{1.1.9}$$

Nous définissons deux tenseurs importants induits par la connexion.

Définition 1.1.19. *Le tenseur de* TORSION *$T \in T^1_2 M$ est défini par*

$$\begin{array}{rcl} T : \chi(M)\times\chi(M) & \to & \chi(M) \\ (X,Y) & \mapsto & T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]. \end{array}$$

Le tenseur de RIEMANN *$R \in T^1_3 M$ est défini par*

$$\begin{array}{rcl} R : \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) & \to & \chi(M) \\ (X,Y,Z) & \mapsto & R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z. \end{array}$$

En termes de composantes, si nous nous donnons des coordonnées $\{x^\mu\}$, alors

$$\begin{array}{rcl} T & = & T^\lambda{}_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes \dfrac{\partial}{\partial x^\lambda} \\ R & = & R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} dx^\beta \otimes dx^\gamma \otimes dx^\delta \otimes \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} \end{array}$$

où

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \tag{1.1.10}$$
$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma\Gamma^\alpha{}_{\delta\beta} - \partial_\delta\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} + \Gamma^\epsilon{}_{\delta\beta}\Gamma^\alpha{}_{\gamma\epsilon} - \Gamma^\epsilon{}_{\gamma\beta}\Gamma^\alpha{}_{\delta\epsilon}. \tag{1.1.11}$$

Définition 1.1.20. *Le tenseur de* RICCI *est un tenseur $(0,2)$ défini localement par*

$$R_{\mu\nu} := R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}.$$

1.1.8 Géométrie riemannienne

Nous définissons à présent les concepts de géométrie riemannienne et nous en donnons les principaux résultats. La géométrie riemannienne est basée sur l'introduction d'une métrique sur l'espace tangent.

Définition 1.1.21. *Soit M une variété différentiable.*
Alors une MÉTRIQUE RIEMANNIENNE *g sur M est un champ tensoriel $(0,2)$ vérifiant*

$$\begin{array}{ll} (1) & g(U,V) = g(V,U) \quad \forall\, U,V \in \chi(M); \\ (2) & g(U,U) \geq 0 \text{ et } g(U,U) = 0 \Leftrightarrow U = 0. \end{array}$$

Il s'agit donc d'une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Une métrique PSEUDO-RIEMANNIENNE *est une métrique dont la condition (2) doit être remplacée par*

$$(3)\ g(U,V) = 0 \quad \forall\, V \in \chi(M) \Rightarrow U = 0.$$

De par sa définition, la forme générale d'une métrique, dans les coordonnées $\{x^\mu\}$, est

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu.$$

Une métrique est donc riemannienne si la matrice $[g_{\mu\nu}]$ est définie positive. De même, une métrique est dite *lorentzienne* si cette matrice possède une valeur propre strictement positive et les autres strictement négatives. Une variété (M,g) munie d'une métrique riemannienne est appelée une *variété riemannienne.*

Soient $p \in M$ et $U \in T_pM$ fixés. Nous avons que $g_p(U,\cdot) : T_pM \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur T_pM. Donc, il existe un unique covecteur $\omega \in T_p^*M$ tel que

$$g_p(U,V) = \langle V, \omega \rangle, \qquad \forall\, V \in T_pM.$$

Cette constatation nous permet de voir que

$$\omega_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu.$$

Les ω_μ sont appelées les coordonnées covariantes de U. Cette manière de "monter" et "descendre" les indices à l'aide de la métrique se généralise pour n'importe quel tenseur. Nous donnons une application de ce changement d'indice.

Définition 1.1.22. *Le* SCALAIRE DE COURBURE *est défini par*

$$R = R^\mu{}_\nu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

Nous précisons que $[g^{\mu\nu}]$ est la matrice inverse de $[g_{\mu\nu}]$, càd $g^{\mu\beta} g_{\beta\nu} = \delta^\mu{}_\nu$.

Nous arrivons à la définition de connexion métrique.

Définition 1.1.23. *Une connexion est dite* MÉTRIQUE *si elle conserve la distance $g(X,Y)$ lors du transport parallèle de X et Y le long d'une courbe. Cela se définit de manière équivalente par $\nabla_\mu g = 0$.*

Pour une connexion métrique, les coefficients de connexion deviennent

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\} + K^\lambda{}_{\mu\nu},$$

où

$$\begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\ \nu \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}(-\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha})$$

sont appelés les *symboles de Christoffel*, et

$$K^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^{\lambda}{}_{\mu\nu} + T_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} + T_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu})$$

est appelé le tenseur de *contorsion.*

Théorème 1.1.1 (Théorème fondamental de la géométrie riemannienne)**.** *Soit une variété riemannienne (M, g). Alors il existe une unique connexion métrique qui soit symétrique, càd telle que*

$$\begin{aligned} &(1) \quad \nabla_\mu g = 0; \\ &(2) \quad \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

Il s'agit de la connexion dite de LEVI-CIVITA *et ses coefficients de connexion sont donnés par*

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\ \nu \end{Bmatrix}.$$

C'est dans la connexion de Levi-Civita que travaillent en général les physiciens. Nous terminons ces rappels par les identités de Bianchi.

Théorème 1.1.2 (Identités de Bianchi)**.** *Dans la connexion de Levi-Civita, nous avons, pour tout $X, Y, Z \in \chi(M)$,*

$$\begin{aligned} &(1) \quad R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0; \\ &(2) \quad (\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Z R)(X,Y) + (\nabla_Y R)(Z,X) = 0. \end{aligned}$$

Ceci termine cette section sur la géométrie différentielle de dimension finie. Nous abordons maintenant l'analyse fonctionnelle.

1.2 Analyse fonctionnelle

Les définitions et résultats suivants sont issus en majorité de [4] et [21] mais peuvent être trouvés dans tout ouvrage traitant d'analyse fonctionnelle.

Nous commençons par définir un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels. Soient X et Y deux espaces vectoriels sur le champ K. Nous considérons uniquement les cas $K = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{C}$.

Définition 1.2.1. *Une application $T : D(T) \subset X \to Y$ est un* OPÉRATEUR LINÉAIRE *si*

— *$D(T)$ est un sous-espace vectoriel de X ;*

— *$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$, pour tout $x, y \in D(T)$, $\alpha, \beta \in K$.*

Nous poursuivons avec la définition d'espace normé et de Banach. Soit $|| \cdot ||$ une norme sur X. Cette norme définit une métrique $d(x, y) = ||x - y||$ et donc une topologie métrique sur X.

Définition 1.2.2. *Un espace vectoriel X muni d'une topologie métrique induite par une norme est appelé un* ESPACE NORMÉ*. Un* ESPACE DE BANACH *est un espace normé et complet.*

Souvent, nous notons la norme $||\cdot||_X$ pour préciser qu'il s'agit de la norme de l'espace X. Mais quand il n'y a aucune ambiguïté, nous la notons simplement $||\cdot||$.

Nous arrivons au produit scalaire, élément indispensable pour définir les espaces de Hilbert.

Définition 1.2.3. *Soit H un espace vectoriel sur K.*
Un PRODUIT SCALAIRE *sur H est une application*

$$\begin{array}{rcl}\langle\cdot,\cdot\rangle : H\times H & \to & K\\ (x,y) & \mapsto & \langle x,y\rangle\end{array}$$

vérifiant

$$\begin{cases}\langle \alpha x_1+\beta x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1,y\rangle + \beta\langle x_2,y\rangle;\\ \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \text{ si } K=\mathbb{R} \text{ et } \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle} \text{ si } K=\mathbb{C};\\ \langle x,x\rangle \geq 0 \text{ et } \langle x,x\rangle \Leftrightarrow x=0,\end{cases}$$

pour tout $x_1,x_2,x,y\in X$, $\alpha,\beta\in K$.

Le produit scalaire est donc bilinéaire dans le cas réel et sesquilinéaire dans le cas complexe. Voici à présent la définition d'espace de Hilbert.

Définition 1.2.4. *Soit H un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. L'espace H est un* ESPACE DE HILBERT *s'il s'agit d'un espace de Banach pour la norme $||\cdot|| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.*

Exemple 1.2.1 (Exemples d'espaces de Hilbert)**.**

1. Soit $n\in\mathbb{N}_0$ quelconque. Alors, K^n est un espace de Hilbert pour le produit scalaire usuel. La norme induite est la norme euclidienne.
2. Définissons
$$l^2(K) = \left\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}_0}\subset K \,\Big|\, \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2 < +\infty\right\}.$$
Cet espace est de Hilbert avec le produit scalaire $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ dans le cas réel et $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y_i}$ dans le cas complexe.

□

Nous enchainons avec les notions de continuité et de bornitude.

Définition 1.2.5. *Soient $(X,||\cdot||_X)$ et $(Y,||\cdot||_Y)$ deux espaces normés.*
Un opérateur $T : D(T)\subset X\to Y$ est CONTINU *en $x_0\in D(T)$ si*

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ tel que } \forall x\in D(T), \text{ nous avons } ||x-x_0||_X<\delta \Rightarrow ||Tx-Tx_0||_Y<\epsilon.$$

Théorème 1.2.1. *Soient $(X,||\cdot||_X)$ et $(Y,||\cdot||_Y)$ deux espaces normés sur K. Soit $T : D(T)\subset X\to Y$ un opérateur linéaire. Alors, les trois assertions suivantes sont équivalentes*

1. *T est continu ;*
2. *T est continu en 0 ;*
3. *T est borné, càd il existe un entier $c\geq 0$ tel que pour tout $x\in D(T)$, nous avons*
$$||Tx||_Y \leq c||x||_X.$$

Ce résultat est très important car il assure que la continuité et la bornitude sont des concepts équivalents dans le cadre des opérateurs linéaires.

Poursuivons avec quelques notions importantes.

Définition 1.2.6. *Si $T : D(T) \subset X \to Y$ est un opérateur linéaire borné, la* NORME *de T est définie par*

$$||T|| = \sup_{x \in D(T), x \neq 0} \frac{||Tx||_Y}{||x||_X}.$$

Proposition 1.2.1. *Soit $T : D(T) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire. Si $D(T)$ est de dimension finie, alors T est borné.*

Définition 1.2.7. *Soient X et Y deux espaces normés sur K. Alors, nous définissons l'ensemble $L(X;Y)$ comme étant l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de X dans Y.*

Proposition 1.2.2. *L'ensemble $L(X;Y)$ est un espace normé pour la norme*

$$||T|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||}.$$

De plus, si Y est un espace de Banach, alors $L(X;Y)$ est aussi un espace de Banach.

Nous définissons le dual topologique, à ne pas confondre avec le dual algébrique (ensemble des fonctionnelles linéaires).

Définition 1.2.8. *Soit X un espace normé. Nous définissons le* DUAL TOPOLOGIQUE *X' comme étant l'ensemble des fonctionnelles linéaires bornées. En d'autres termes,*

$$X' = L(X;K).$$

Nous donnons maintenant quelques types importants d'opérateurs.

Définition 1.2.9 (Opérateur Adjoint)**.** *Soit A un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert H. L'opérateur $A^* : H \to H$ défini par*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad \forall\ x, y \in H$$

*est appelé l'*OPÉRATEUR ADJOINT *de A.*
Dans le cas où $A = A^*$, l'opérateur A est dit AUTO-ADJOINT *ou* HERMITIEN.

Définition 1.2.10 (Opérateur unitaire)**.** *Si l'opérateur linéaire borné A sur l'espace de Hilbert H vérifie $A^*A = AA^* = I$, où I est l'opérateur identité sur H, alors A est dit* UNITAIRE.

Nous définissons les valeurs propres et vecteurs propres d'opérateurs.

Définition 1.2.11. *Soit A un opérateur linéaire sur un espace vectoriel E. Le nombre complexe λ sera dit* VALEUR PROPRE *de A s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que*

$$Ax = \lambda x. \tag{1.2.1}$$

Un tel vecteur x sera appelé VECTEUR PROPRE *de A associé à la valeur propre λ.*

Proposition 1.2.3. *Toutes les valeurs propres d'un opérateur hermitien sont réelles.*

Le théorème suivant est d'une grande importance dans la théorie des espaces de Hilbert car il établit un isomorphisme naturel entre un espace de Hilbert et son dual topologique.

Théorème 1.2.2 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)**.**
Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $a \in H$, nous définissons la fonctionnelle linéaire bornée $f_a \in H'$ donnée par

$$f_a(x) = \langle x, a \rangle \text{ pour tout } x \in H.$$

Alors, l'application

$$\begin{array}{rcl} T : H & \to & H' \\ a & \mapsto & f_a \end{array}$$

est un isomorphisme sesquilinéaire. Autrement dit, pour tout $f \in H'$, il existe un unique $a \in H$ tel que $f(\cdot) = \langle a, \cdot \rangle$.

Nous précisons qu'un *isomorphisme* entre deux espaces de Hilbert H_1 et H_2 est une bijection $T : H_1 \to H_2$ telle que $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tout $x, y \in H_1$.

Nous continuons, dans l'optique de définir une base orthonormale d'un espace de Hilbert, avec la notion de système orthonormal.

Définition 1.2.12. *Soit H un espace de Hilbert. Deux éléments $x, y \in H$ sont dits* ORTHOGONAUX*, ce que nous notons $x \perp y$, si $\langle x, y\rangle = 0$.*
Un ensemble S de vecteurs non nuls de H est appelé un SYSTÈME ORTHOGONAL *si, pour tout $x, y \in S$, $x \neq y$, nous avons $x \perp y$. Si, en plus, $||x|| = 1$ pour tout $x \in S$, alors S est appelé un* SYSTÈME ORTHONORMAL.
Une suite de vecteurs qui constitue un système orthonormal est appelée une SUITE ORTHONORMALE.

Définition 1.2.13. *Une suite orthonormale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset H$ est* COMPLÈTE *si, pour tout $x \in H$, nous avons*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n.$$

Définition 1.2.14. *Un système orthonormal B de H est une* BASE ORTHONORMALE *si chaque $x \in H$ possède une unique représentation*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n,$$

où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset K$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset B$.

Par conséquent, une suite orthonormale complète est une base orthonormale.

Nous définissons la séparabilité de la manière suivante.

Définition 1.2.15. *Un espace de Hilbert est dit* SÉPARABLE *s'il contient une suite orthonormale complète.*

Nous avons que les espaces de Hilbert de dimension finie sont séparables.

Voici, pour finir, un des théorèmes les plus importants concernant les espaces de Hilbert séparables.

Théorème 1.2.3. *Soit H un espace de Hilbert séparable sur K.*
(a) Si $\dim H = n < +\infty$, alors H est isomorphe à K^n ;
(b) Si H est de dimension infinie, alors H est isomorphe à $l^2(K)$.

Ce théorème nous autorise à nous concentrer par la suite sur l'espace $l^2(\mathbb{R})$.

Ceci clôture les rappels et nous pouvons commencer à aborder les fondations des variétés hilbertiennes.

Chapitre 2

Notions d'analyse sur les espaces de Banach et de Hilbert

Avant d'aborder les variétés hilbertiennes et la géométrie différentielle en dimension infinie, nous devons étudier de plus près les espaces de Hilbert et les applications entre ces espaces.

Dans la première section de ce chapitre, nous définissons tout d'abord la notion de différentiabilité pour les applications entre espaces de Banach. Ce concept n'est généralement pas abordé dans les cours d'analyse fonctionnelle mais nous sera indispensable pour la suite du mémoire. La théorie présentée ici est basée sur [7] et [9]. Nous avons ajouté deux exemples importants en vue d'étudier les variétés modelées sur $l^2(\mathbb{R})$. La fin de cette première section est composée de différents lemmes qui seront utilisés dans les chapitres ultérieurs de ce mémoire. Précisons que ces lemmes, sauf mention explicite du contraire, sont des productions personnelles non issues de sources extérieures.

La deuxième section est consacrée aux espaces tangent et cotangent d'espaces de Hilbert. En effet, avant de parler d'espace (co)tangent d'une variété, il est nécessaire de définir ce qui sera la représentation locale d'un tel espace. Nous terminons en introduisant la tangentielle d'une application entre deux espaces de Hilbert ainsi que sa transposée, la cotangentielle. Nous insistons sur le fait que nous ne parlons pas encore de variété dans ce chapitre.

2.1 Différentiabilité

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Banach, U et V deux ouverts de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ respectivement. Considérons une application $f : U \to V$. Selon [7] ou [9], nous définissons la différentiabilité de f de la manière suivante.

Définition 2.1.1. *La fonction $f : U \subset \mathbb{E} \to V \subset \mathbb{F}$ est* DIFFÉRENTIABLE *(au sens de Fréchet) en $u_0 \in U$ si et seulement si il existe $Df(u_0) \in L(\mathbb{E};\mathbb{F})$ tel que*

$$f(u) - f(u_0) - (Df(u_0))(u - u_0) = o(||u - u_0||), \tag{2.1.1}$$

où o est le petit o de Landau de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ défini par

$$\lim_{x \to 0} \frac{o(||x||)}{||x||} = 0.$$

Dans ce cas, $Df(u_0)$ est unique.

Cette définition est donnée dans le cadre général des espaces de Banach mais nous considérons, dans ce mémoire, $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ comme étant des espaces de Hilbert séparables. En particulier, les espaces que nous utiliserons seront principalement $l^2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$. Nous donnons donc les trois exemples suivants.

Exemple 2.1.1 (Les fonctions de $l^2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$)**.**

Posons $\mathbb{E} = l^2$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et $f : l^2 \to \mathbb{R}$.
La fonction f est différentiable en $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in l^2$ si et seulement si il existe $Df(a) \in L(l^2; \mathbb{R})$ tel que

$$f(x) - f(a) - (Df(a))(x - a) = o(||x - a||).$$

Cette dernière équation se réécrit

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - (Df(a))(x - a)}{||x - a||} = 0.$$

Ensuite, nous savons que $L(l^2; \mathbb{R}) = (l^2)'$, soit le dual topologique de l^2 formé par l'ensemble des fonctionnelles linéaires continues sur l^2. Puisque l^2 est un espace de Hilbert, le Théorème 1.2.2 de représentation de Riesz nous assure l'existence et l'unicité d'un élément $c \in l^2$ tel que, pour tout $x \in l^2$, nous avons la relation

$$(Df(a))(x) = \langle c, x\rangle.$$

Donc, nous avons que f est différentiable en a si et seulement si il existe un $c = (c_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in l^2$ tel que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - \langle c, x - a\rangle}{||x - a||} = 0. \tag{2.1.2}$$

Posons $i \in \mathbb{N}_0$ fixé. Soit $x = (a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots)$, où $x_i \in \mathbb{R}$. En d'autres termes, x est l'élément a dont nous avons modifié arbitrairement la i-ème composante. Comme $a \in l^2$, nous avons aussi que $x \in l^2$ peu importe la valeur de x_i.
Si f est différentiable, alors l'équation (2.1.2) implique que

$$\lim_{x_i\to a_i} \frac{f(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots) - f(a_1, a_2, \cdots) - c_i(x_i - a_i)}{|x_i - a_i|} = 0.$$

Nous obtenons dès lors

$$c_i = \lim_{x_i\to a_i} \frac{f(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots) - f(a_1, a_2, \cdots)}{x_i - a_i} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Nous venons donc de montrer que c est la généralisation du gradient en dimension infinie car

$$\nabla f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)_{i\in\mathbb{N}_0}.$$

En conclusion, f est différentiable en a si et seulement si $\nabla f(a)$ existe et est un élément de l^2. Et comme $(Df(a))(y) = \langle\nabla f(a), y\rangle$, pour tout $y \in l^2$, nous avons que

$$||Df(a)|| = ||\nabla f(a)||. \tag{2.1.3}$$

$\square$

Exemple 2.1.2 (Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans l^2)**.**

Posons $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, $\mathbb{F} = l^2$ et $f : \mathbb{R} \to l^2$.
Nous avons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (f_i(x))_{i\in\mathbb{N}_0}$, où f_i est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout i, et $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|^2 < +\infty$. Nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Lemme 2.1.1.
L'application $f : \mathbb{R} \to l^2$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si la fonction f_i est différentiable en a, pour tout $i \in \mathbb{N}_0$, et $(f_i'(a))_{i\in\mathbb{N}_0} \in l^2$.
De plus, $Df(a) = (Df_i(a))_{i\in\mathbb{N}_0}$.

Preuve

$\boxed{\Rightarrow}$:

Supposons que f soit différentiable en a. Par définition, $Df(a) \in L(\mathbb{R}; l^2)$. Donc, $Df(a) = ((Df(a))_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$, où $(Df(a))_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Comme $Df(a)$ est linéaire, $(Df(a))_i$ est aussi linéaire, pour tout i. Or, il s'agit de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cela signifie que $(Df(a))_i (x) = (Df(a))_i (1)x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, et donc $(Df(a))_i \in L(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, pour tout i.
En manipulant l'équation (2.1.1), nous obtenons que

$$\lim_{x \to a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{f_i(x) - f_i(a)}{x - a} - (Df(a))_i (1) \right] e_i = 0,$$

où e_i est le i^e vecteur de la base canonique de l^2. Nous avons donc, pour tout i,

$$(Df(a))_i (1) = \lim_{x \to a} \frac{f_i(x) - f_i(a)}{x - a} = f_i'(a) =: Df_i(a)(1).$$

Cette dernière équation montre que, pour tout i, f_i est différentiable en a, et que $Df(a) = (Df_i(a))_{i \in \mathbb{N}_0}$. Pour terminer, nous constatons que, comme $Df(a)$ est à valeur dans l^2, $Df(a)(1) = (f_i'(a))_{i \in \mathbb{N}_0} \in l^2$.

$\boxed{\Leftarrow}$:

Supposons que f_i soit différentiable en a, pour tout i, et que $(f_i'(a))_{i \in \mathbb{N}_0} \in l^2$.
Posons $Df(a) := (Df_i(a))_{i \in \mathbb{N}_0}$, où $Df_i(a)(x) = f_i'(a)x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. De nouveau, l'équation (2.1.1) devient

$$\lim_{x \to a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{f_i(x) - f_i(a)}{x - a} - (Df(a))_i (1) \right] e_i = 0,$$

càd

$$(Df(a))_i (1) = \lim_{x \to a} \frac{f_i(x) - f_i(a)}{x - a} = f_i'(a) =: Df_i(a)(1).$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $Df(a) \in L(\mathbb{R}; l^2)$. La linéarité est une conséquence directe de la linéarité des opérateurs $Df_i(a) \in L(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Pour la bornitude, constatons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} ||Df(a)(x)|| &= ||(f_i'(a))_{i \in \mathbb{N}_0} x|| \\ &= ||(f_i'(a))_{i \in \mathbb{N}_0}|| \cdot |x|. \end{aligned}$$

Puisque $(f_i'(a))_{i \in \mathbb{N}_0} \in l^2$, cette dernière équation montre que $Df(a)$ est borné.
En conclusion, $Df(a)$ est un élément de $L(\mathbb{R}; l^2)$ vérifiant (2.1.1).

□

Ce lemme est très important car il permet d'écrire

$$Df(a)(x) = \left(f_i'(a)\right)_{i \in \mathbb{N}_0} \cdot x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.1.4}$$

Exemple 2.1.3 (Les applications de l^2 dans l^2)**.**

Posons $\mathbb{E} = \mathbb{F} = l^2$ et soit $f : l^2 \to l^2$.
Nous avons que, pour tout $x \in l^2$, $f(x) = (f_i(x))_{i \in \mathbb{N}_0}$, où f_i est une fonction de l^2 dans $\mathbb{R}$ pour tout i, et $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|^2 < +\infty$. Le lemme suivant sera d'une grande utilité :

Lemme 2.1.2.
Si l'application $f : l^2 \to l^2$ est différentiable en $a \in l^2$, alors, pour tout $i \in \mathbb{N}_0$, la fonction f_i est différentiable en a et $(Df(a))_i = Df_i(a)$.

Preuve
Supposons que f est différentiable en a.
Dès lors, en exploitant la Définition 2.1.1, il existe un opérateur $Df(a) \in L(l^2, l^2)$ tel que

$$\lim_{x \to a} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \left(f_i(x) - f_i(a) - \left((Df(a))_i\right)(x-a)\right) e_i}{||x-a||} = 0,$$

où $\left((Df(a))_i\right)(y) := \left((Df(a))(y)\right)_i$.
Cela implique que, pour tout i,

$$\lim_{x \to a} \frac{f_i(x) - f_i(a) - \left((Df(a))_i\right)(x-a)}{||x-a||} = 0.$$

Donc, si nous montrons, pour tout i, que $(Df(a))_i$ est une fonctionnelle linéaire bornée, nous aurons montré que f_i est différentiable en a et que $Df_i(a) = (Df(a))_i$, pour tout i.
Soit $i \in \mathbb{N}_0$ arbitraire fixé.
La fonctionnelle $(Df(a))_i$ est linéaire puisque $Df(a)$ l'est.
Pour la bornitude, nous constatons que, pour tout $y \in l^2$,

$$\begin{aligned} \left|\left((Df(a))_i\right)(y)\right|^2 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left|\left((Df(a))_j\right)(y)\right|^2 \\ &= ||(Df(a))(y)||^2 \\ &\leq ||Df(a)||^2 \, ||y||^2. \end{aligned}$$

Nous avons donc que f_i est différentiable en a pour tout i et $Df_i(a) = (Df(a))_i$.

□

Remarquons que, si nous prenons $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}^m$ dans la Définition 2.1.1, nous retrouvons la définition habituelle de différentiabilité.

Nous donnons maintenant quelques définitions supplémentaires issues de [7].

Définition 2.1.2.
(i) L'application $f : U \subset \mathbb{E} \to V \subset \mathbb{F}$ est dite différentiable de classe C^1 si elle est différentiable en tout $u \in U$ et si l'application $Df : U \to L(\mathbb{E}; \mathbb{F})$ est continue.

(ii) Par récurrence, supposons que f est différentiable de classe C^{r-1}. Autrement dit, supposons que l'application $D^{r-1}f : U \to L(\mathbb{E}; L(\mathbb{E}; \ldots L(\mathbb{E}; \mathbb{F})) \cong L(\mathbb{E}, \ldots, \mathbb{E}; \mathbb{F})$, où l'espace $\mathbb{E}$ est représenté $(r-1)$ fois, ait été précédemment bien définie et soit continue. Si $D^{r-1}f$ est différentiable de classe C^1, alors nous posons $D(D^{r-1}f) = D^r f$ et f est dite de classe C^r.

(iii) L'application f est dite différentiable de classe C^∞ si elle est différentiable de classe C^r pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Dorénavant, une application sera dite différentiable si elle est différentiable de classe C^∞.
Nous donnons trois propriétés importantes provenant de [9].

Proposition 2.1.1. *Soient U, V, W trois ouverts d'espaces de Banach et $f : U \to V$, $g : V \to W$ deux applications différentiables.*
Alors $g \circ f$ est différentiable. De plus, nous avons que

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a),$$

pour tout $a \in U$.

Proposition 2.1.2. *Si $f \in L(\mathbb{E};\mathbb{F})$, alors*
(i) f est différentiable ;
(ii) $Df(a) = f$ pour tout $a \in \mathbb{E}$;
(iii) $D^r f = 0$ pour tout $r \geq 2$.

Proposition 2.1.3. *Soient U un ouvert de $\mathbb{E}$ et $f : U \to \mathbb{F}$ une application de classe C^p. Alors, pour tout $u \in U$, $D^p f(u)$, vu comme un élément de $L(\underbrace{\mathbb{E},\ldots,\mathbb{E}}_{p};\mathbb{F})$ [1], est symétrique.*

Cela signifie par exemple que, si f est de classe C^2, alors nous avons, pour tout $u, x, y \in \mathbb{E}$,

$$(D^2 f(u))(x,y) := [(D^2 f(u))(x)](y) = (D^2 f(u))(y,x).$$

Il s'agit donc d'une généralisation du théorème de Schwarz [2].

Nous donnons la définition de difféomorphisme.

Définition 2.1.3.
L'application $f : U \subset \mathbb{E} \to V \subset \mathbb{F}$ est un DIFFÉOMORPHISME *si f est bijective, différentiable et si f^{-1} est différentiable.*

Le résultat suivant est une application directe des Propositions 2.1.1 et 2.1.2. Si $f : U \subset \mathbb{E} \to V \subset \mathbb{F}$ est un difféomorphisme, alors

$$Df^{-1}(y) = \left(Df(f^{-1}(y))\right)^{-1}, \tag{2.1.5}$$

pour tout $y \in V$. En effet, $id = D(f \circ f^{-1})(y) = Df(f^{-1}(y)) \circ Df^{-1}(y)$.

Proposition 2.1.4. *Les espaces de Hilbert $l^2(\mathbb{R})$ et $l^2(\mathbb{C})$ sont difféomorphes.*

Preuve
Considérons l'application suivante,

$$\begin{array}{rcl} f : l^2(\mathbb{R}) & \to & l^2(\mathbb{C}) \\ z_r = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) & \mapsto & f(z_r) = z_c = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots). \end{array}$$

Cette application est une bijection car $z_r \in l^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow z_c \in l^2(\mathbb{C})$. En effet,

$$\begin{aligned} ||z_r||_2^2 &= \sum_{k=1}^{\infty}(x_k^2 + y_k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + iy_k|^2 \\ &= ||z_c||_2^2. \end{aligned}$$

Donc, à tout élément de $l^2(\mathbb{R})$ correspond un et un seul élément de $l^2(\mathbb{C})$ et réciproquement.
Cette application est différentiable. En effet, f est linéaire et également bornée puisque $||f(z_r)||_2 = ||z_c||_2 = ||z_r||_2$. Donc, $f \in L(l^2(\mathbb{R}); l^2(\mathbb{C}))$ et la Proposition 2.1.2 permet de conclure. La preuve de la différentiabilité de f^{-1} est similaire.
En conclusion, f est un difféomorphisme et donc $l^2(\mathbb{R})$ et $l^2(\mathbb{C})$ sont difféomorphes.

□

1. Nous rappelons que $L(\mathbb{E}; L(\mathbb{E}; \ldots; L(\mathbb{E};\mathbb{F})\ldots))$, où l'espace $\mathbb{E}$ est repris p fois, peut être identifié à $L(\underbrace{\mathbb{E},\ldots,\mathbb{E}}_{p};\mathbb{F})$. En effet, il suffit de définir, pour tout $A \in L(\mathbb{E}; L(\mathbb{E}; \ldots; L(\mathbb{E};\mathbb{F})\ldots))$, l'opérateur $B \in L(\underbrace{\mathbb{E},\ldots,\mathbb{E}}_{p};\mathbb{F})$ par $B(x_1,\ldots,x_p) := (\ldots((A(x_1))(x_2))\ldots)(x_p)$.

2. Voir [20] ou n'importe quel ouvrage traitant de calcul différentiel.

Nous terminons en donnant quelques lemmes qui seront utiles par la suite. Il s'agit de plusieurs règles de différentiation dans certains cas particuliers. Ces lemmes et leurs démonstrations sont des réalisations personnelles.

Lemme 2.1.3. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Hilbert, $Y : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ et $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ deux applications différentiables.*
Alors, l'application $fY := f(\cdot)Y(\cdot) : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est différentiable et

$$D(fY)(u) = ((Df(u))(\cdot))Y(u) + f(u)DY(u), \tag{2.1.6}$$

pour tout $u \in \mathbb{E}$.

Preuve
Soit $u_0 \in \mathbb{E}$ quelconque.
Par définition de la dérivée, nous avons

$$f(u)Y(u) - f(u_0)Y(u_0) - (D(f(u_0)Y(u_0))(u - u_0) = o(||u - u_0||).$$

Nous devons donc montrer que

$$f(u)Y(u) - f(u_0)Y(u_0) - ((Df(u_0))(u - u_0))Y(u_0) - f(u_0)(DY(u_0))(u - u_0) = o(||u - u_0||). \tag{2.1.7}$$

En effet, cette équation montre que fY est différentiable et que l'équation (2.1.6) est correcte. Or, nous constatons que l'équation (2.1.7) se réécrit

$$\begin{aligned}[] [f(u) - f(u_0) - (Df(u_0))(u - u_0)]\, Y(u) \quad &+ \quad f(u_0)\,[Y(u) - Y(u_0) - (DY(u_0))(u - u_0)] \\ &+ \quad (Df(u_0))(u - u_0)\,[Y(u) - Y(u_0)] = o(||u - u_0||). \end{aligned}$$

Nous avons successivement

$$\begin{aligned} &\lim_{u\to u_0} \Bigg\| [f(u) - f(u_0) - (Df(u_0))(u - u_0)]\, Y(u) \quad + \quad f(u_0)\,[Y(u) - Y(u_0) - (DY(u_0))(u - u_0)] \\ &\qquad\qquad + \quad (Df(u_0))(u - u_0)\,[Y(u) - Y(u_0)] \Bigg\| \cdot \frac{1}{||u - u_0||} \\ &\le \lim_{u\to u_0} \Bigg[\frac{||f(u) - f(u_0) - (Df(u_0))(u - u_0)||}{||u - u_0||} ||Y(u)|| \quad + \quad ||f(u_0)|| \frac{||Y(u) - Y(u_0) - (DY(u_0))(u - u_0)||}{||u - u_0||} \\ &\qquad\qquad + \quad \frac{||(Df(u_0))(u - u_0)||}{||u - u_0||} ||Y(u) - Y(u_0)|| \Bigg]. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes tendent vers 0 car f et Y sont des applications différentiables. Le troisième terme tend également vers 0 car Y est continue et

$$\frac{||(Df(u_0))(u - u_0)||}{||u - u_0||} \le ||Df(u_0)|| < +\infty,$$

puisque $Df(u_0)$ est borné.
En conclusion, l'équation (2.1.7) est vérifiée et donc le lemme est démontré.

□

Lemme 2.1.4. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Hilbert et $f, g : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ des applications différentiables.*
Alors, $\langle f(\cdot), g(\cdot)\rangle : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ est différentiable et, pour tout $u \in \mathbb{E}$,

$$D\,\langle f(u), g(u)\rangle = \langle (Df(u))(\cdot), g(u)\rangle + \langle f(u), (Dg(u))(\cdot)\rangle\,. \tag{2.1.8}$$

Preuve
Soit $u_0 \in \mathbb{E}$ quelconque.
Nous savons, par définition, que

$$\langle f(u), g(u)\rangle - \langle f(u_0), g(u_0)\rangle - (D\langle f(u_0), g(u_0)\rangle)(u-u_0) = o(||u-u_0||).$$

Nous devons donc montrer que

$$\langle f(u), g(u)\rangle - \langle f(u_0), g(u_0)\rangle - \langle (Df(u_0))(u-u_0), g(u_0)\rangle - \langle f(u_0), (Dg(u_0))(u-u_0)\rangle = o(||u-u_0||). \tag{2.1.9}$$

De cette manière, nous aurons montré que $\langle f(\cdot), g(\cdot)\rangle$ est différentiable et que l'équation (2.1.8) est correcte puisque u_0 est arbitraire.
Or, l'équation (2.1.9) est équivalente à

$$\begin{aligned}\langle f(u)-f(u_0), g(u)-g(u_0)\rangle &+ \langle f(u)-f(u_0)-(Df(u_0))(u-u_0), g(u_0)\rangle \\ &+ \langle f(u_0), g(u)-g(u_0)-(Dg(u_0))(u-u_0)\rangle = o(||u-u_0||).\end{aligned}$$

Nous avons, successivement,

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to u_0}\Big|\langle f(u)-f(u_0), g(u)-g(u_0)\rangle + \langle f(u)-f(u_0)-(Df(u_0))(u-u_0), g(u_0)\rangle \\
&\qquad + \langle f(u_0), g(u)-g(u_0)-(Dg(u_0))(u-u_0)\rangle\Big| \cdot \frac{1}{||u-u_0||} \\
\leq{}& \lim_{u\to u_0}\Big[\Big|\langle f(u)-f(u_0), g(u)-g(u_0)\rangle\Big| + \Big|\langle f(u)-f(u_0)-(Df(u_0))(u-u_0), g(u_0)\rangle\Big| \\
&\qquad + \Big|\langle f(u_0), g(u)-g(u_0)-(Dg(u_0))(u-u_0)\rangle\Big|\Big] \cdot \frac{1}{||u-u_0||} \\
\leq{}& \lim_{u\to u_0}\Big[\frac{||f(u)-f(u_0)||}{||u-u_0||}||g(u)-g(u_0)|| + \frac{||f(u)-f(u_0)-(Df(u_0))(u-u_0)||}{||u-u_0||}||g(u_0)|| \\
&\qquad + ||f(u_0)||\frac{||g(u)-g(u_0)-(Dg(u_0))(u-u_0)||}{||u-u_0||}\Big].
\end{aligned}$$

Les deuxième et troisième termes de cette expression tendent vers 0 car f et g sont différentiables.
Pour le premier terme, nous savons que

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{u\to u_0}\frac{||f(u)-f(u_0)-(Df(u_0))(u-u_0)||}{||u-u_0||} \\ &\geq \lim_{u\to u_0}\left|\frac{||f(u)-f(u_0)||}{||u-u_0||} - \frac{||(Df(u_0))(u-u_0)||}{||u-u_0||}\right|.\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{u\to u_0}\frac{||(Df(u_0))(u-u_0)||}{||u-u_0||} \leq ||Df(u_0)|| < +\infty$$

puisque $Df(u_0)$ est borné, nous avons obligatoirement que

$$\lim_{u\to u_0}\frac{||f(u)-f(u_0)||}{||u-u_0||} < +\infty.$$

Cela implique que le premier terme de notre expression tend aussi vers 0 car g est continue. Donc, nous avons que

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to u_0}\Bigg| \langle f(u)-f(u_0), g(u)-g(u_0)\rangle \quad &+ \quad \langle f(u)-f(u_0)-(Df(u_0))(u-u_0), g(u_0)\rangle \\
&+ \quad \langle f(u_0), g(u)-g(u_0)-(Dg(u_0))(u-u_0)\rangle \Bigg| \cdot \frac{1}{||u-u_0||} = 0 \\
\Leftrightarrow \langle f(u)-f(u_0), g(u)-g(u_0)\rangle \quad &+ \quad \langle f(u)-f(u_0)-(Df(u_0))(u-u_0), g(u_0)\rangle \\
&+ \quad \langle f(u_0), g(u)-g(u_0)-(Dg(u_0))(u-u_0)\rangle = o(||u-u_0||)
\end{aligned}$$

et l'équation (2.1.9) est vérifiée.

□

Écrire la formule (2.1.8) en termes de composantes, dans le cas particulier où $\mathbb{E}=\mathbb{F}=l^2$, est utile pour se rendre compte de l'importance de ce lemme.

Considérons $f=(f^i)_{i\in\mathbb{N}_0}, g=(g^i)_{i\in\mathbb{N}_0} : l^2\to l^2$ différentiables et $u\in l^2$. Dans ce cas, la formule (2.1.8) est équivalente à, pour tout $z=(z^k)_{k\in l^2}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\sum_{i=1}^{\infty} f^i(u)g^i(u)\right)z^k = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\partial f^i}{\partial u^k}(u)g^i(u)+f^i(u)\frac{\partial g^i}{\partial u^k}(u)\right]z^k.$$

En prenant $z=e_k$, le k-ème vecteur de la base canonique, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\sum_{i=1}^{\infty} f^i(u)g^i(u)\right) &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\partial f^i}{\partial u^k}(u)g^i(u)+f^i(u)\frac{\partial g^i}{\partial u^k}(u)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial u^k}\left(f^i(u)g^i(u)\right).
\end{aligned}$$

Ce lemme nous a donc permis, dans ce cadre-ci, de permuter l'opérateur dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial u^k}$ avec la série $\sum$, ce qui était une étape délicate.

Lemme 2.1.5. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Hilbert et $f:\mathbb{E}\to L(\mathbb{E};\mathbb{F})$, $g:\mathbb{E}\to\mathbb{E}$, deux applications différentiables. Alors, l'application $f(\cdot)[g(\cdot)]:\mathbb{E}\to\mathbb{F}$ est différentiable et, pour tout $u\in\mathbb{E}$,*

$$D\left(f(u)\left[g(u)\right]\right) = \left[\left(Df(u)\right)(\cdot)\right]\left[g(u)\right] + f(u)\circ Dg(u). \tag{2.1.10}$$

Preuve
Soit $u_0\in\mathbb{E}$ quelconque. Similairement aux deux preuves précédentes, nous devons montrer que

$$f(u)\left[g(u)\right]-f(u_0)\left[g(u_0)\right]-\left[\left(Df(u_0)\right)(u-u_0)\right]\left[g(u_0)\right]-f(u_0)\left[\left(Dg(u_0)\right)(u-u_0)\right]=o(||u-u_0||).$$

Cette équation se réécrit

$$\begin{aligned}
\left[f(u)-f(u_0)-(Df(u_0))(u-u_0)\right]\left[g(u)\right] \quad &+ \quad f(u_0)\left[g(u)-g(u_0)-(Dg(u_0))(u-u_0)\right] \\
&+ \quad \left[(Df(u_0)(u-u_0)\right]\left[g(u)-g(u_0)\right] = o(||u-u_0||).
\end{aligned}$$

Or, nous avons que

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to u_0}\Bigg|\Bigg|\left[f(u)-f(u_0)-(Df(u_0))(u-u_0)\right][g(u)] &+&\quad f(u_0)\left[g(u)-g(u_0)-(Dg(u_0))(u-u_0)\right]\\
& &+&\quad \left[(Df(u_0)(u-u_0)\right][g(u)-g(u_0)]\Bigg|\Bigg|\cdot\frac{1}{||u-u_0||}\\
\leq\ &\lim_{u\to u_0}\Bigg[\frac{||f(u)-f(u_0)-(Df(u_0))(u-u_0)||}{||u-u_0||}||g(u)|| &+&\quad ||f(u_0)||\frac{||g(u)-g(u_0)-(Dg(u_0))(u-u_0)||}{||u-u_0||}\\
& &+&\quad ||Df(u_0)||\cdot||g(u)-g(u_0)||\Bigg].
\end{aligned}$$

Les deux premiers termes tendent vers 0 car f et g sont différentiables. Le troisième tend également vers 0 car $Df(u_0)\in L(\mathbb{E};L(\mathbb{E};\mathbb{F}))$ et g est continue, ce qui termine la preuve.

□

Lemme 2.1.6. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Hilbert et $f:\mathbb{E}\to\mathbb{F}$, $g:\mathbb{E}\to\mathbb{E}$, deux applications différentiables.*
Alors, l'application $(Df(\cdot))(g(\cdot)):\mathbb{E}\to\mathbb{F}$ est différentiable et, pour tout $u\in\mathbb{E}$,

$$D\left[(Df(u))(g(u))\right]=\left(D^2f(u)\right)(g(u))+Df(u)\circ Dg(u). \tag{2.1.11}$$

Preuve
Il s'agit en fait d'un cas particulier du Lemme 2.1.5, en remplaçant f par Df et en considérant la symétrie de $D^2f(u)$ (voir la Proposition 2.1.3).

□

2.2 Espaces tangent et cotangent d'un espace de Hilbert

Avant de parler de variété, nous devons définir l'espace tangent (cotangent) d'un espace de Hilbert. En effet, l'espace tangent (cotangent) d'une variété sera représenté par l'espace tangent (cotangent) de l'espace de représentation, c'est-à-dire un espace de Hilbert dans notre cas.

Considérons $\mathbb{E}$ un espace de Hilbert séparable sur un corps $\mathbb{K}$ et U un de ses ouverts.

Définition 2.2.1.
*Pour tout $u_0\in U$, nous définissons l'*ESPACE TANGENT *de U en u_0 par l'ensemble*

$$T_{u_0}U=\{(u_0,X),X\in\mathbb{E}\}$$

muni de la structure d'espace vectoriel induite par la projection canonique $(u_0,X)\mapsto X$.
L'espace tangent total est défini comme étant la collection des espaces tangents sur U, c'est-à-dire, en termes ensemblistes,

$$TU=\bigcup_{u_0\in U}T_{u_0}U.$$

Nous avons donc que $TU=U\times\mathbb{E}$.

Soit la projection $\tau:U\times\mathbb{E}\to U$, $(u_0,X)\mapsto u_0$. L'espace tangent total TU muni de la projection τ est appelé le FIBRÉ TANGENT *de U. Nous le notons $\tau:TU\to U$.*

Définition 2.2.2. *Pour tout $u_0 \in U$, nous définissons l'*ESPACE COTANGENT *de U en u_0 par l'ensemble*

$$T^*_{u_0}U = \{(u_0, \omega), \omega \in \mathbb{E}'\}$$

muni de la structure d'espace vectoriel induite par la projection canonique $(u_0, \omega) \mapsto \omega$.
L'espace cotangent total est défini comme étant la collection des espaces cotangents sur U, c'est-à-dire, en termes ensemblistes,

$$T^*U = \bigcup_{u_0 \in U} T^*_{u_0}U.$$

Nous avons donc que $T^*U = U \times \mathbb{E}'$.

Soit la projection $\tau^* : U \times \mathbb{E}' \to U$, $(u_0, \omega) \mapsto u_0$. L'espace cotangent total T^*U muni de la projection τ^* est appelé le FIBRÉ COTANGENT *de U. Nous le notons $\tau^* : T^*U \to U$.*

Plus généralement, nous pouvons aussi définir l'espace vectoriel $T^r_{s\,u_0}U = \{(u_0, \omega), \omega \in T^r_s\mathbb{E}\}$, où

$$T^r_s\mathbb{E} = L(\underbrace{\mathbb{E}', \ldots, \mathbb{E}'}_{r}, \underbrace{\mathbb{E}, \ldots, \mathbb{E}}_{s}; \mathbb{R})$$

est l'espace des tenseurs (r, s) sur $\mathbb{E}$, et

$$T^r_sU = \bigcup_{u_0 \in U} T^r_{s\,u_0}U.$$

Nous avons donc que $T^1_0U = TU$ et $T^0_1U = T^*U$.

Ces définitions sont en fait l'équivalent des fibrés des variétés triviales en dimension finie. En effet, si $U \subset \mathbb{R}^n$, alors nous avons $TU \cong U \times \mathbb{R}^n$ et $T^*U \cong U \times \mathbb{R}^n \cong U \times (R^n)'$. Il est donc logique, en dimension infinie, de réaliser la même identification. Ces espaces sont parfois aussi appelés *fibrés des repères*.

Nous donnons la propriété suivante, importante dans le cadre de la représentation d'un tenseur (r, s) quelconque.

Propriété 2.2.1 (Représentation d'un tenseur (r, s))**.** *Tout tenseur $T \in T^r_s\mathbb{E}$ est déterminé complètement, et de manière unique, par ses composantes*

$$T^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} := T(e^{*i_1}, \ldots, e^{*i_r}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_s}) \in \mathbb{K},$$

où $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \in \mathbb{N}_0$, $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ est une base orthonormale de $\mathbb{E}$ et $\{e^{*k}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ sa base duale.

Preuve
Soit $T \in T^r_s\mathbb{E}$ quelconque.
Considérons $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathbb{E}'$ et $X_1, \ldots, X_s \in \mathbb{E}$. Nous avons que, pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ et $j \in \{1, \ldots, s\}$,

$$\omega_i = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{ik} e^{*k} \quad \text{et} \quad X_j = \sum_{k=1}^{\infty} X_j{}^k e_k,$$

où $\{\omega_{ik}\}_{i,k \in N_0}$ et $\{X_j{}^k\}_{j,k \in N_0}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ déterminés de manière unique. Par définition, T est linéaire et continu en chacun de ses arguments. Il en découle que

$$\begin{aligned}
T(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s) &= T\left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \omega_{1k_1} e^{*k_1}, \ldots, \sum_{k_r=1}^{\infty} \omega_{rk_r} e^{*k_r}, \sum_{l_1=1}^{\infty} X_1{}^{l_1} e_{l_1}, \ldots, \sum_{l_s=1}^{\infty} X_s{}^{l_s} e_{l_s}\right) \\
&= \sum_{k_1, \ldots, k_r, l_1, \ldots, l_s = 1}^{\infty} \omega_{1k_1} \ldots \omega_{rk_r} X_1{}^{l_1} \ldots X_s{}^{l_s} T(e^{*k_1}, \ldots, e^{*k_r}, e_{l_1}, \ldots, e_{l_s}) \\
&= \sum_{k_1, \ldots, k_r, l_1, \ldots, l_s = 1}^{\infty} \omega_{1k_1} \ldots \omega_{rk_r} X_1{}^{l_1} \ldots X_s{}^{l_s} T^{k_1 \ldots k_r}{}_{l_1 \ldots l_s}.
\end{aligned}$$

Comme les ω_i et les X_j sont arbitraires, nous avons que T est complètement déterminé par les $T^{i_1 \dots i_r}{}_{j_1 \dots j_s}$, et ce de manière unique.

$\square$

Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux espaces de Hilbert séparables et $U \subset \mathbb{E}$, $V \subset \mathbb{F}$ des ouverts.

Définition 2.2.3. *Toute fonction différentiable $f : U \to V$ définit une application $Tf : TU \to TV$ appelée* APPLICATION TANGENTIELLE *de f.*
Elle est définie par $Tf(u, X) = (f(u), (Df(u))(X))$.

Nous dénotons par $T_u f$ la restriction de Tf à $T_u U$, telle que

$$T_u f : T_u U \to T_{f(u)} V.$$

Cette notion généralise celle, en dimension finie, de pushforward (Définition 1.1.14) entre variétés triviales.

Nous constatons qu'il y a un lien très étroit entre l'application (linéaire bornée) $T_u f$ et $Df(u)$. C'est pourquoi Tf est parfois appelée la *différentielle* de f. Mais nous n'utiliserons pas cette dénomination car un autre objet, très proche, héritera de ce nom dans le chapitre suivant.

Définition 2.2.4. *L'application linéaire bornée $T_u f : T_u U \to T_{f(u)} V$ induit l'application linéaire bornée transposée $T_u^* f : T_{f(u)}^* V \to T_u^* U$ définie par*

$$\langle X, T_u^* f(\omega) \rangle = \langle T_u f(X), \omega \rangle \tag{2.2.1}$$

*pour tout $X \in T_u U$, $\omega \in T_{f(u)}^* V$, où $\langle , \rangle$ représente à chaque fois le couplage naturel entre espace tangent et espace cotangent. Nous lui donnons le nom d'*APPLICATION COTANGENTIELLE.

Nous précisons que le couplage $\langle , \rangle$ entre $T_u U$ et $T_u^* U$ est défini naturellement de la manière suivante.
Si $\mathcal{X} = (u, X) \in T_u U$ et $\mathcal{W} = (u, \omega) \in T_u^* U$, alors

$$\langle \mathcal{X}, \mathcal{W} \rangle := \langle X, \omega \rangle = \omega(X). \tag{2.2.2}$$

La cotangentielle est en fait la généralisation du pullback (Définition 1.1.15).

Considérons, à nouveau, une fonction différentiable $f : U \subset \mathbb{E} \to V \subset \mathbb{F}$. Nous supposons, cette fois-ci, que $T_u f : T_u U \to T_{f(u)} V$ est un isomorphisme pour tout $u \in U$. Dans ce cas, f détermine, pour tout $(r, s) \in \mathbb{N}^2$, une application

$$T_s^r f : T_s^r U \quad \to \quad T_s^r V$$

définie par l'isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} T^r_{s\,u} f : T^r_{s\,u} U & \to & T^r_{s\,f(u)} V \\ (u, \omega) & \mapsto & \Big(f(u), \omega \circ \Big((Df(u))^* \times \ldots \times (Df(u))^* \times (Df(u))^{-1} \times \ldots \times (Df(u))^{-1} \Big) \Big), \end{array}$$

pour tout $u \in U$, où l'étoile désigne l'application transposée.
Notons que $T_u f$ doit être un isomorphisme pour tout u afin que $(Df(u))^{-1}$ existe et soit défini sur tout $\mathbb{F}$.

Ce chapitre a étudié, dans la première sections, la notion de différentiabilité entre espaces de Banach et de Hilbert. Ce concept est centrale dans le cadre des variétés hilbertiennes puisque leurs changements de carte sont des applications différentiables entre espaces de Hilbert. La seconde section s'est attelée à la construction des fibrés des repères, càd les fibrés tangent et cotangent des espaces de Hilbert. Ces concepts importants nous permettrons de définir solidement les espaces tangent et cotangent des variétés hilbertiennes dans le chapitre suivant en utilisant une approche différente de celle en dimension finie.

Chapitre 3

Concepts généraux de géométrie différentielle

Nous abordons maintenant la géométrie différentielle en dimension infinie. L'objectif de cette étude est de développer une généralisation des outils présentés au Chapitre 1 dans le cas hilbertien.

Dans la première partie de ce chapitre (Section 3.1 à Section 3.6), nous présentons tout d'abord la définition formelle d'une variété différentiable modelée sur $\mathbb{E}$, où $\mathbb{E}$ est un espace de Hilbert séparable quelconque. Nous définissons ensuite l'espace tangent en un point d'une variété ainsi que les vecteurs tangents en ce point. Nous introduisons, par la suite, les courbes et les vecteurs tangents qui y sont associés. Nous poursuivons tout naturellement avec les fibrés tangent et cotangent. Nous construisons aussi les fibrés vectoriels et le fibré des tenseurs (r, s). Nous terminons en parlant des applications entre variétés et des notions de différentielle, pushforward et pullback.

La deuxième partie du chapitre (Section 3.7 à Section 3.12) est dédiée aux champs vectoriels et à leur flot associé, à la dérivée covariante ainsi qu'aux symboles de Christoffel. Les tenseurs de courbure et de torsion sont définis et leurs propriétés abordées. Nous expliquons la notion de parallélisme et de géodésique. Nous terminons en introduisant le tenseur de métrique et la connexion de Levi-Civita.

Nous nous sommes inspirés principalement de [7] pour la plupart des notions présentées dans ce chapitre, mais le lecteur peut tout aussi bien les retrouver dans [1] ou [9], quoiqu'introduites de manière assez différente. Par ailleurs, nous présentons le plus souvent possible une particularisation de ces concepts pour $\mathbb{E} = l^2$. Cette particularisation est à chaque fois une réalisation originale, tout comme toutes les démonstrations présentées dans ce chapitre.

3.1 Variétés différentiables

Nous commençons avec la définition de variété hilbertienne. Soit $\mathbb{E}$ un espace de Hilbert séparable.

Définition 3.1.1. *Une* VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE M *modelée sur* $\mathbb{E}$ *est définie de la manière suivante :*
(1) M *est un espace topologique séparé ;*
(2) M *possède un* ATLAS DIFFÉRENTIABLE.

Un atlas différentiable de M *est une famille de* CARTES LOCALES $(u_\alpha, M_\alpha)_{\alpha\in A}$, *où* A *est un index quelconque, telles que*

— $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ *est un recouvrement d'ouverts de* M *;*

— *pour tout* $\alpha \in A$, $u_\alpha : M_\alpha \to U_\alpha \subset \mathbb{E}$, *où* $U_\alpha := u_\alpha(M_\alpha)$ *est un ouvert, est un homéomorphisme. Les* u_α *sont appelées* FONCTIONS DE COORDONNÉES ;
— *si* $M_{\alpha\beta} := M_\alpha \cap M_\beta$, $U_{\alpha\beta} := u_\alpha(M_{\alpha\beta})$ *et* $U_{\beta\alpha} := u_\beta(M_{\alpha\beta})$, *alors* $u_\beta \circ u_\alpha^{-1} : U_{\alpha\beta} \to U_{\beta\alpha}$ *est un difféomorphisme. Autrement dit, les changements de coordonnées sont différentiables.*

Cette définition est exactement la même qu'en dimension finie mis à part l'espace de représentation. En effet, en prenant $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, nous retrouvons la Définition 1.1.1.

A priori, rien n'oblige $\mathbb{E}$ à être un espace de Hilbert. En effet, nous aurions pu être plus généraux et poser $\mathbb{E}$ comme étant un espace de Banach. Mais, dans ce mémoire, les dénominations *variété*, *variété différentiable* où encore *variété hilbertienne*, sont toutes équivalentes et se rapportent à cette définition, avec $\mathbb{E}$ étant un espace de Hilbert séparable.

Nous l'illustrons cette définition par un exemple concret.

Exemple 3.1.1 (La sphère dans l^2, S^∞).

Soit $S^\infty = \left\{x \in l^2 : ||x|| = 1\right\}$. Nous allons montrer qu'il s'agit d'une variété différentiable modelée sur l^2.

Cette sphère est un espace topologique séparé, la topologie sur S^∞ étant la topologie induite de l^2. Ses ouverts de base sont les boules ouvertes définies de la manière suivante :

$$B_{x,\epsilon} = \{y \in S^\infty : ||x - y|| < \epsilon\}$$

où $x \in S^\infty$ et $\epsilon > 0$.

Nous proposons l'atlas $\{(u_i, M_i)\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ où, pour tout i,

$$M_i = \{x \in S^\infty : x_i \neq 0\}$$

et

$$u_i(x) = (x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots),$$

pour tout $x \in M_i$.
Nous montrons qu'il s'agit effectivement d'un atlas différentiable de S^∞.

— Pour tout i, M_i est un ouvert de S^∞ :
Fixons i et $x \in M_i$. Si nous montrons qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que $B_{x,\epsilon} \subset M_i$, alors nous aurons prouvé que M_i est ouvert.
Posons $\epsilon = |x_i|$ et supposons par l'absurde que $B_{x,\epsilon} \setminus M_i$ soit non vide. Dès lors, il existe un $y \in B_{x,\epsilon} \setminus M_i$.
Si $y \notin M_i$ et que $y \in S^\infty$, cela signifie que $y_i = 0$. De plus, $y \in B_{x,\epsilon}$ nous dit que $||x - y||^2 < \epsilon^2$. Or,
$$||x - y||^2 = \sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} (x_j - y_j)^2 + x_i^2.$$
Comme $\epsilon = |x_i|$ et $||x - y||^2 < \epsilon^2$, nous avons que
$$\sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} (x_j - y_j)^2 < 0,$$
d'où la contradiction. Donc, $B_{x,\epsilon} \setminus M_i$ est vide, et nous avons montré que M_i est ouvert.

— $(M_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ est un recouvrement de S^∞ :
C'est évident car, pour tout $x \in S^\infty$, nous avons que $||x|| = 1$. Il existe donc au moins un indice i tel que $x_i \neq 0$, c'est-à-dire tel que $x \in M_i$.

— Les fonctions de coordonnées $u_i : M_i \to U_i$ sont clairement des homéomorphismes et $U_i = B_{0,1}$ est ouvert.

— Les changements de coordonnées sont différentiables :
Soient i et j deux indices fixés arbitrairement tels que $i < j$ (le cas $i > j$ est similaire).
Posons $M_{ij} := M_i \cap M_j = \{x \in S^\infty : x_i \neq 0, x_j \neq 0\}$.
Nous avons

$$\begin{aligned} U_{ij} &:= u_i(M_{ij}) = \left\{x \in l^2 : ||x|| < 1 \text{ et } x_{j-1} \neq 0\right\} \\ U_{ji} &:= u_j(M_{ij}) = \left\{x \in l^2 : ||x|| < 1 \text{ et } x_i \neq 0\right\}. \end{aligned}$$

Nous devons montrer que l'application $f := u_j \circ u_i^{-1} : U_{ij} \to U_{ji}$ est différentiable.
Soit $x \in U_{ij}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= u_j(x_1, \cdots, x_{i-1}, \sqrt{1 - ||x||^2}, x_i, \cdots) \\ &= (x_1, \cdots, x_{i-1}, \sqrt{1 - ||x||^2}, x_i, \cdots, x_{j-2}, x_j, \cdots), \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$f(x) = g(x) + (k \circ h \circ n)(x),$$

où

$$\begin{cases} g : l^2 \to l^2, & x \mapsto (x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{j-2}, x_j, \cdots) \\ n : U_{ij} \mapsto]0,1[\,, & x \mapsto ||x||^2 \\ h :]0,1[\to \mathbb{R}_0^+, & \alpha \mapsto \sqrt{1-\alpha} \\ k : \mathbb{R} \to l^2, & \beta \mapsto \beta e_i. \end{cases}$$

Nous voyons tout de suite que $g \in L(l^2; l^2)$ et $k \in L(\mathbb{R}; l^2)$. Donc, en vertu de la Proposition 2.1.2, ces deux applications sont différentiables. De plus, h est clairement différentiable sur $]0, 1[$. Si nous montrons que n est aussi différentiable, alors par la Proposition 2.1.1 et le fait que la somme d'applications différentiables est différentiable, nous aurons montré que f est différentiable.
Constatons que $\nabla n(x) = 2x \in l^2$ pour tout $x \in l^2$. Dès lors, n est une fois différentiable.
Nous remarquons ensuite que $Dn \in L(l^2; L(l^2; \mathbb{R}))$. En effet, pour tout $x, y, z \in l^2$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (Dn(\alpha x + \beta y))(z) &= \langle \nabla n(\alpha x + \beta y), z\rangle \\ &= \langle 2(\alpha x + \beta y), z\rangle \\ &= \alpha\langle 2x, z\rangle + \beta\langle 2y, z\rangle \\ &= \alpha(Dn(x))(z) + \beta(Dn(y))(z), \end{aligned}$$

et donc $Dn(\alpha x + \beta y) = \alpha Dn(x) + \beta Dn(y)$, c'est-à-dire que Dn est linéaire. De plus, pour tout $x, y \in l^2$,

$$\begin{aligned} ||(Dn(x))(y)|| &= |\langle 2x, y\rangle| \\ &\leq 2||x|| \cdot ||y||. \end{aligned}$$

Nous avons donc que $||Dn|| \leq 2$. Cela signifie que Dn est bien borné.
Comme $Dn \in L(l^2; L(l^2; \mathbb{R}))$ et que $L(l^2; \mathbb{R})$ est un espace de Banach, nous pouvons appliquer la Proposition 2.1.2 et affirmer que Dn est différentiable. Cela implique directement que n est différentiable sur l^2, et par conséquent sur U_{ij}.
Les changements de coordonnées sont donc bien des difféomorphismes.

Nous pouvons conclure cet exemple en affirmant que S^∞ est une variété différentiable.

3.2 Vecteurs tangents et espace tangent

Les définitions et propriétés suivantes proviennent de [7].

1. Soient (u, M_u) une carte de M et $p \in M_u$. Posons $U = u(M_u) \subset \mathbb{E}$.
   Nous appelons $T_{u(p)}U$ la *représentation, relative à la carte* (u, M_u)*, de l'espace tangent de* M *en* p.
   Soit $(u(p), X_{u(p)}) \in T_{u(p)}U$. L'élément $X_{u(p)} \in \mathbb{E}$ est appelé la *partie principale* du vecteur $(u(p), X_{u(p)})$.

2. Soient (u_α, M_α) et (u_β, M_β) deux cartes couvrant $p \in M$, et $U_\alpha = u_\alpha(M_\alpha)$, $U_\beta = u_\beta(M_\beta)$. Alors, l'application changement de carte $u_\beta \circ u_\alpha^{-1} : u_\alpha(M_\alpha \cap M_\beta) \to u_\beta(M_\beta \cap M_\alpha)$ définit (voir la définition 2.2.3) l'isomorphisme linéaire
   $$T_{u_\alpha(p)}(u_\beta \circ u_\alpha^{-1}) : T_{u_\alpha(p)}U_\alpha \to T_{u_\beta(p)}U_\beta.$$

3. Un vecteur tangent de M en p est défini par la famille de ses représentations, données par les cartes couvrant p. Autrement dit, dans les mêmes notations qu'au point précédent, $(u_\alpha(p), X_{u_\alpha(p)}) \in T_{u_\alpha(p)}U_\alpha$ et $(u_\beta(p), X_{u_\beta(p)}) \in T_{u_\beta(p)}U_\beta$ représentent le même vecteur tangent de M au point p si et seulement si
   $$(u_\beta(p), X_{u_\beta(p)}) = \left(T_{u_\alpha(p)}(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})\right)\left(u_\alpha(p), X_{u_\alpha(p)}\right). \tag{3.2.1}$$
   Par définition de la tangentielle (voir la Définition 2.2.3), et par le fait que $u_\beta(p) = (u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))$, cela est équivalent à
   $$X_{u_\beta(p)} = \left(D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right)\left(X_{u_\alpha(p)}\right). \tag{3.2.2}$$
   La formule (3.2.2) est la formule de changement de coordonnées d'un vecteur tangent habituellement rencontrée dans la géométrie différentielle classique.

4. Nous appelons l'*espace tangent de* M *en* p l'ensemble des vecteurs tangents à M en p et nous le notons T_pM.
   L'application de représentation $T_pu : T_pM \to T_{u(p)}U$, qui envoie tout vecteur de T_pM sur sa représentation dans la carte (u, M_u), est un isomorphisme linéaire. Cela nous montre que T_pM est un espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{E}$.

5. Soit $pr_2 : T_{u(p)}U \to \mathbb{E}$, $(u(p), X) \mapsto X$ l'isomorphisme canonique entre ces deux espaces. Nous définissons la *différentielle de* u *en* p par l'application $Du(p) := pr_2 \circ T_pu$.

6. Posons
   $$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$$
   et
   $$\tau_M : TM \to M,\ X \in T_pM \mapsto p.$$
   Alors, (TM, τ_M) est une variété différentiable modelée sur $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$. Nous l'appelons le *fibré tangent de* M. Pour le voir, il suffit de remarquer que, si $(u_\alpha, M_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un atlas de M, alors $(Tu_\alpha, TM_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un atlas de (TM, τ_M) où
   $$TM_\alpha := \bigcup_{p \in M_\alpha} T_pM$$

et

$$\begin{aligned} Tu_\alpha : TM_\alpha &\to TU_\alpha \\ X &\mapsto T_{\tau_M(X)}u_\alpha(X), \end{aligned}$$

comme cela est démontré dans [7].

La Figure 3.1 donne un représentation schématique de l'espace tangent et de sa représentation dans la carte (M_α, u_α).

Maintenant que nous avons défini formellement les concepts de vecteurs et espaces tangents, nous donnons une particularisation de la formule (3.2.2) dans le cas où $\mathbb{E} = l^2$.

Exemple 3.2.1 (Loi de transformation des vecteurs tangents)**.**

Dans le cas des variétés modelées sur l^2, la formule (3.2.2) devient

$$\begin{aligned} X_{u_\beta(p)} &= \left(D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right)\left(X_{u_\alpha(p)}\right) \\ &= \left(\langle \nabla(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})^i(u_\alpha(p)), X_{u_\alpha(p)}\rangle\right)_{i\in\mathbb{N}_0}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$X^i_{u_\beta(p)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})^i(y^1, y^2, \ldots)}{\partial y^j}\Big|_{y=u_\alpha(p)} X^j_{u_\alpha(p)}. \tag{3.2.3}$$

Nous retrouvons la même formule qu'en dimension finie (voir l'équation 1.1.1), mis à part le fait qu'il ne s'agit plus d'une somme finie mais bien d'une série. La convergence de cette série est assurée par le caractère différentiable des changements de cartes.

3.3 Courbes et vecteur tangent associé

En dimension finie, les vecteurs tangents peuvent êtres introduits en considérant les tangentes aux courbes. En effet, il s'avère que tout vecteur tangent peut être représenté par une courbe, et que toute courbe représente un vecteur tangent. Les vecteurs tangents peuvent donc être définis comme des classes d'équivalences de courbes. Nous montrons dans cette section que c'est aussi le cas en dimension infinie.

Définition 3.3.1 (Courbe différentiable)**.** *Une* COURBE DIFFÉRENTIABLE *d'une variété M est une application $c :]a, b[\to M$, où $a < 0 < b$, telle que, pour toute carte locale (u, M_u), l'application $C_u := u \circ c :]a, b[\cap M_u \to \mathbb{E}$ est différentiable.*

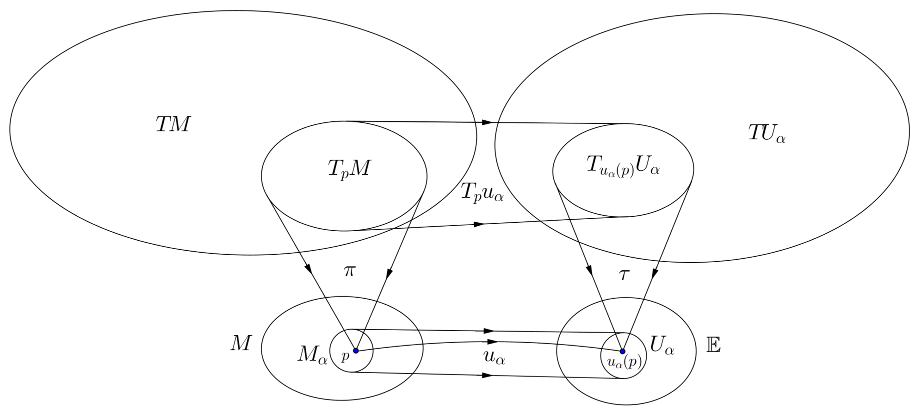


Figure 3.1: Espace tangent et sa représentation dans la carte (M_α, u_α).

Définition 3.3.2 (Vecteur tangent à une courbe)**.** *Le* VECTEUR TANGENT À LA COURBE $c :]a,b[\to M$, *au point* $p = c(0)$, *est défini localement, dans la carte* (u, M_u), *par l'élément* $(C_u(0), \dot{C}_u(0))$, *où*

$$\dot{C}_u(0) = (DC_u(0))\,(1).$$

Cette définition a du sens car C_u est différentiable. Il reste maintenant à montrer qu'il s'agit bien d'un vecteur tangent, càd d'un élément de T_pM.

Proposition 3.3.1. *Le vecteur tangent à la courbe* $c :]a,b[\to M$, *au point* $p = c(0)$, *est un élément de* T_pM.

Preuve
Considérons deux cartes locales quelconques, (u_α, M_α) et (u_β, M_β), couvrant le point p. Pour montrer que le vecteur tangent à la courbe c en p est un élément de T_pM, nous devons montrer qu'il vérifie la loi de transformation des vecteurs tangents (3.2.2). Cela revient à montrer que

$$\dot{C}_\beta(0) = \left[D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})\,(C_\alpha)(0))\right]\Big((\dot{C}_\alpha)(0)\Big).$$

Or, en utilisant la Proposition 2.1.1, nous avons directement que

$$\begin{aligned}
\dot{C}_\beta(0) &= (DC_\beta(0))\,(1)\\
&= \left[D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1} \circ u_\alpha \circ c)(0)\right](1)\\
&= \left[D\left((u_\beta \circ u_\alpha^{-1}) \circ C_\alpha\right)(0)\right](1)\\
&= \left[D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(C_\alpha(0)) \circ DC_\alpha(0)\right](1)\\
&= \left[D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(C_\alpha(0))\right]((DC_\alpha(0))(1))\\
&= \left[D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})\,(C_\alpha)(0))\right]\Big((\dot{C}_\alpha)(0)\Big).
\end{aligned}$$

□

La particularisation à l^2 s'effectue aisément. En nous basant sur l'équation (2.1.4), nous pouvons écrire les coordonnées de la partie principale du vecteur tangent à la courbe c de la manière suivante :

$$\dot{C}_u(0) = \left(\frac{d{C_u}^i(t)}{dt}\bigg|_{t=0}\right)_{i\in\mathbb{N}_0},$$

où $C_u = \left({C_u}^i\right)_{i\in\mathbb{N}_0}$ et ${C_u}^i :]a,b[\to \mathbb{R}$ pour tout i. Nous retrouvons la même formule qu'à l'équation (1.1.2), hormis le fait que nous avons une infinité de coordonnées. De même qu'en dimension finie, nous avons une bijection entre les vecteurs tangents et les classes d'équivalences de courbes (deux courbes étant équivalentes si elles possèdent le même vecteur tangent en 0) [1]. Cela signifie qu'à toute courbe correspond un vecteur tangent, mais aussi que tout vecteur tangent peut être représenté par une courbe (qui n'est pas unique).

3.4 Covecteurs et espace cotangent

Pour tout $p \in M$, nous définissons l'espace cotangent de M en p, noté T_p^*M, comme étant le dual topologique de T_pM. Similairement à la définition de l'espace tangent, nous avons successivement les points suivants :

1. Si (u, M_u) est une carte couvrant p et $U = u(M_u)$, alors $T^*_{u(p)}U$ est la *représentation de l'espace cotangent de* M *en* p.
   Soit $(u(p), \omega_{u(p)}) \in T^*_{u(p)}U$. L'élément $\omega_{u(p)} \in \mathbb{E}'$ est appelé la *partie principale* du covecteur $(u(p), \omega_{u(p)})$.

1. Voir [9].

2. Soient (u_α, M_α) et (u_β, M_β) deux cartes couvrant $p \in M$, et $U_\alpha = u_\alpha(M_\alpha)$, $U_\beta = u_\beta(M_\beta)$. Alors, l'application changement de carte $u_\beta \circ u_\alpha^{-1} : u_\alpha(M_\alpha \cap M_\beta) \to u_\beta(M_\beta \cap M_\alpha)$ définit (voir la Définition 2.2.4) l'isomorphisme linéaire

$$T^*_{u_\alpha(p)}(u_\beta \circ u_\alpha^{-1}) : T^*_{u_\beta(p)}U_\beta \to T^*_{u_\alpha(p)}U_\alpha.$$

3. Un covecteur de M en p est défini par la famille de ses représentations, donnée par les cartes couvrant p. Autrement dit, dans les mêmes notations qu'au point précédent, $(u_\alpha(p), \omega_{u_\alpha(p)}) \in T^*_{u_\alpha(p)}U_\alpha$ et $(u_\beta(p), \omega_{u_\beta(p)}) \in T^*_{u_\beta(p)}U_\beta$ représentent le même covecteur de M au point p si et seulement si

$$(u_\alpha(p), \omega_{u_\alpha(p)}) = \left(T^*_{u_\alpha(p)}(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})\right)\left(u_\beta(p), \omega_{u_\beta(p)}\right),$$

c'est-à-dire, en utilisant (3.2.1) et (2.2.2),

$$\langle X_{u_\alpha(p)}, \omega_{u_\alpha(p)}\rangle = \langle X_{u_\beta(p)}, \omega_{u_\beta(p)}\rangle. \tag{3.4.1}$$

Cette dernière équation nous confirme que le résultat de l'application d'un covecteur sur un vecteur tangent, tous les deux au même point de M, est indépendant du choix de la carte. Nous sommes donc certains que, pour n'importe quelle carte (u_α, M_α) couvrant p,

$$\omega(X) = \langle X, \omega\rangle = \langle X_{u_\alpha(p)}, \omega_{u_\alpha(p)}\rangle, \tag{3.4.2}$$

pour tout $X \in T_pM$ et pour tout covecteur ω en p.
En utilisant la formule (3.2.2), nous pouvons déduire de l'équation (3.4.1) que

$$\langle X_{u_\alpha(p)}, \omega_{u_\alpha(p)}\rangle = \left\langle \left(D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right)\left(X_{u_\alpha(p)}\right), \omega_{u_\beta(p)}\right\rangle,$$

ce qui nous donne

$$\omega_{u_\alpha(p)} = \left(\left(D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right)^*\right)\left(\omega_{u_\beta(p)}\right), \tag{3.4.3}$$

où $\left(D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right)^*$ est l'application transposée de $D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))$.

4. Nous appelons l'*espace cotangent de M en p* l'ensemble des covecteurs de M en p et nous le notons T^*_pM.
L'application de représentation $T^\nu_p u : T^*_pM \to T^*_{u(p)}U$, qui envoie tout covecteur de T^*_pM sur sa représentation dans la carte (u, M_u), est un isomorphisme linéaire. Il s'agit, comme nous le montre l'équation (3.4.2), de l'inverse de l'application transposée de T_pu, càd $T^\nu_p u = (T^*_p u)^{-1}$. Cela nous montre que T^*_pM est un espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{E}'$, donc isomorphe à $\mathbb{E}$.

5. Posons

$$T^*M := \bigcup_{p\in M} T^*_pM$$

et

$$\tau^*_M : T^*M \to M,\ \omega \in T^*_pM \mapsto p.$$

Alors, (T^*M, τ^*_M) est une variété différentiable modelée sur $\mathbb{E}\times\mathbb{E}'$. Nous l'appelons le *fibré cotangent de M*. Pour le voir, il suffit de remarquer que, si $(u_\alpha, M_\alpha)_{\alpha\in A}$ est un atlas de M, alors $(T^\nu u_\alpha, T^*M_\alpha)_{\alpha\in A}$ est un atlas de (T^*M, τ^*_M) où

$$T^*M_\alpha := \bigcup_{p\in M_\alpha} T^*_pM$$

et

$$\begin{array}{rcl} T^\nu u_\alpha : T^*M_\alpha & \to & T^*U_\alpha \\ \omega & \mapsto & T^\nu_{\tau^*_M(\omega)} u_\alpha(\omega). \end{array}$$

Comme pour les vecteurs tangents, nous donnons une particularisation de la formule de changement de carte pour les covecteurs dans le cas où $\mathbb{E} = l^2$.

Exemple 3.4.1 (Loi de transformation des covecteurs)**.**

Par les formules (3.4.1) et (3.2.3), nous avons que

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^\infty X^i_{u_\alpha(p)} \omega_{u_\alpha(p)_i} & = & \displaystyle\sum_{j=1}^\infty X^j_{u_\beta(p)} \omega_{u_\beta(p)_j} \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{i=1}^\infty \frac{\partial (u_\beta \circ u_\alpha^{-1})^j (y^1, y^2, \ldots)}{\partial y^i} \Big|_{y=u_\alpha(p)} X^i_{u_\alpha(p)} \right) \omega_{u_\beta(p)_j}. \end{array}$$

Cette formule est valable peu importe le vecteur X. Nous obtenons donc la formule suivante en posant $X_{u_\alpha(p)} = e_i$.

$$\omega_{u_\alpha(p)_i} = \sum_{j=1}^\infty \frac{\partial (u_\beta \circ u_\alpha^{-1})^j (y^1, y^2, \ldots)}{\partial y^i} \Big|_{y=u_\alpha(p)} \omega_{u_\beta(p)_j}. \tag{3.4.4}$$

Si nous comparons cette formule avec l'équation (3.2.3), nous constatons que celle-ci est en sens contraire. C'est pourquoi nous disons qu'un covecteur est un tenseur *covariant*, alors qu'un vecteur (tangent) est un tenseur *contravariant*. Cette dénomination est exactement la même qu'en dimension finie, et nous renvoyons le lecteur vers [3] ou [14] pour plus d'explications sur le sujet.

Nous signalons, pour finir, que la formule (3.4.4) est exactement la même qu'en dimension finie (voir équation (1.1.3)), hormis le fait que la somme a été remplacée par une série.

3.5 Fibrés vectoriels

Le but de cette section est, tout d'abord, d'introduire la notion de fibré vectoriel en dimension infinie. Cela nous permettra, par la suite, de définir les tenseurs (r, s), et ce dans un formalisme différent de ce qui a été fait au Chapitre 1.

Définition 3.5.1 (Fibré vectoriel)**.** *Considérons une variété M modelée sur un espace de Hilbert $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ un espace de Banach. Soient P un ensemble et π une application surjective, $\pi : P \to M$, appelée* PROJECTION.
Supposons que, pour tout $p \in M$, $\mathbb{F}_p := \pi^{-1}(p)$ est Banach-isomorphe à $\mathbb{F}$, et est appelée la FIBRE *de π en p. Supposons de plus que M possède un atlas tel que, pour toute carte (u, M_u), nous ayons une carte de fibré (Pu, u, M_u) définie par le diagramme commutatif*[2] *d'applications*

$$\begin{tikzcd} PM_u := \pi^{-1}(M_u) \arrow[r, "Pu"] \arrow[d, "\pi|_{PM_u}"] & U \times \mathbb{F} \arrow[d, "pr_1"] \\ M_u \arrow[r, "u"] & U \end{tikzcd}$$

et vérifiant les points suivants :

2. Commutatif signifie, dans ce cas-ci, que $pr_1 \circ Pu = u \circ \pi|_{PM_u}$.

1. *L'application Pu est bijective et*

$$P_p u := Pu|_{\mathbb{F}_p} : \mathbb{F}_p \to \{u(p)\} \times \mathbb{F}$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach.

2. *Si $(Pu_\alpha, u_\alpha, M_\alpha)$ et $(Pu_\beta, u_\beta, M_\beta)$ sont deux cartes de fibré, alors*

$$Pu_\beta \circ \left(Pu_\alpha|_{P(M_\alpha \cap M_\beta)}\right)^{-1} : u_\alpha(M_\alpha \cap M_\beta) \times \mathbb{F} \to u_\beta(M_\beta \cap M_\alpha) \times \mathbb{F}$$

est un difféomorphisme. Il est également noté, plus brièvement, $Pu_\beta \circ Pu_\alpha^{-1}$.

L'objet ainsi défini est appelé FIBRÉ VECTORIEL SUR M AVEC FIBRE MODELÉE SUR $\mathbb{F}$. *L'espace P est appelé l'*ESPACE TOTAL DE π *et M est appelé l'*ESPACE DE BASE DE π.

La propriété suivante établit le fait qu'il s'agit également d'une variété.

Propriété 3.5.1. *Soit $\pi : P \to M$ un fibré vectoriel sur M avec fibre modelée sur $\mathbb{F}$. Si $(u_\alpha, M_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un atlas de M, alors $(Pu_\alpha, PM_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un atlas différentiable de l'espace total P. L'espace P est donc une variété modelée sur $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$.*

Définition 3.5.2. *Une application différentiable $s : M \to P$ telle que $\pi \circ s = id$ est appelée* SECTION *du fibré π.*

Les fibrés tangent et cotangent définis aux points 3.2 et 3.4 sont des exemples de fibrés vectoriels. Nous donnons maintenant une méthode qui permet de construire un fibré à partir de plusieurs autres fibrés. Cela nous permettra de construire le fibré des tenseurs (r, s).

Soient $\{\alpha_i : A_i \to M\}_{1 \leq i \leq r}$ et $\beta : B \to M$ des fibrés vectoriels sur M, où $r \in \mathbb{N}$. Soient $\mathbb{F}_i$ le modèle des fibres de α_i, pour tout i, et $\mathbb{G}$ le modèle des fibres de β. Nous posons

$$\mathbb{H} := L(\mathbb{F}_1, \ldots, \mathbb{F}_r; \mathbb{G}).$$

Supposons qu'il existe un atlas de M tel que, pour toute carte (u, M_u), nous avons des cartes de fibré $(A_i u, u, M_u)$ et (Bu, u, M_u) pour $\{\alpha_i\}$ et β [3].
Pour tout $p \in M$, nous définissons

$$\mathbb{H}_p := L(\mathbb{F}_{1,p}, \ldots, \mathbb{F}_{r,p}; \mathbb{G}_p),$$

où $\mathbb{F}_{i,p}$ est la fibre de α_i en p.
Nous définissons également $C := L(A_1, \ldots, A_r; B)$ comme étant l'union des $\mathbb{H}_p$, càd

$$C = L(A_1, \ldots, A_r; B) := \bigcup_{p \in M} \mathbb{H}_p.$$

Soit $\gamma := L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r; \beta) : C = L(A_1, \ldots, A_r; B) \to M$ la projection définie par $\gamma^{-1}(p) = \mathbb{H}_p$. Nous disposons donc, pour le moment, de l'espace de base M, de l'espace total C et d'une projection $\gamma : C \to M$. Il ne nous manque donc qu'un atlas de fibré pour faire de γ un fibré vectoriel. Nous construisons cet atlas sur base de l'atlas de M.

Pour toute carte (u, M_u) de M, nous définissons une carte de fibré (Cu, u, M_u) par [4]

$$\begin{array}{rcl} Cu(p) : \mathbb{H}_p & \to & \mathbb{H} \\ X_p & \mapsto & Bu(p) \circ X_p \circ \left(A_1 u(p)^{-1} \times \ldots \times A_r u(p)^{-1}\right). \end{array}$$

3. Nous pouvons effectuer cette supposition (voir [7]).
4. Pour un fibré $\pi : P \to M$ avec fibre modelée sur $\mathbb{F}$, la notation $Pu(p)$, où $p \in M$, désigne l'isomorphisme $\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}$ défini par $Pu(p) := pr_2 \circ P_p u$. Ces isomorphismes déterminent complètement Pu.

L'objet que nous venons de construire,

$$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r; \beta) : L(A_1, \ldots, A_r; B) \to M,$$

muni de l'atlas de fibré défini ci-dessus, est un fibré vectoriel sur M [5]. Il s'agit donc d'une variété modelée sur $\mathbb{E} \times \mathbb{H}$. Avec cela, nous pouvons enfin définir le fibré des tenseurs (r, s).

Soient $\tau : TM \to M$ et $\tau^* : T^*M \to M$ les fibrés tangent et cotangent, ainsi que $\rho : \mathbb{R}M := M \times \mathbb{R} \to M$ le fibré trivial [6].

Définition 3.5.3 (Fibré des tenseurs (r, s))**.**
Le fibré des tenseurs (r, s) sur M est défini par

$$L(\underbrace{\tau^*, \ldots, \tau^*}_{r}, \underbrace{\tau, \ldots, \tau}_{s}; \rho) : L(\underbrace{T^*M, \ldots, T^*M}_{r}, \underbrace{TM, \ldots, TM}_{s}; \mathbb{R}M) \to M,$$

souvent noté brièvement

$$\tau_s^r : T_s^r M \to M.$$

Nous avons donc que $T_s^r M$ est une variété modelée sur $\mathbb{E} \times T_s^r \mathbb{E}$. Ses fibres sont isomorphes à $T_s^r \mathbb{E}$. Les constructions de la section 2.2 nous montrent que $\tau_0^1 = \tau$ et $\tau_1^0 = \tau^*$.

Concernant les changements de carte, la fin de la Section 2.2 nous permet les constructions suivantes. Si (u_α, M_α) et (u_β, M_β) sont deux cartes couvrant $p \in M$, alors l'application $u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1} : U_\alpha \to U_\beta$ définit l'isomorphisme ${T_s^r}_p(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})$:

$$\begin{aligned} {T^r_s}_{u_\alpha(p)} U_\alpha \quad &\to \quad {T^r_s}_{u_\beta(p)} U_\beta \\ (u_\alpha(p), t) \quad &\mapsto \quad \Bigg(u_\beta(p), t \circ \Big(\underbrace{(D(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})(u_\alpha(p)))^* \times \ldots \times (D(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})(u_\alpha(p)))^*}_{r} \times \\ &\qquad \underbrace{\big(D(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})(u_\alpha(p))\big)^{-1} \times \ldots \times \big(D(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})(u_\alpha(p))\big)^{-1}}_{s} \Big) \Bigg). \end{aligned}$$

Les fonctions de transition de τ_s^r, càd les applications de changement de cartes

$$T_s^r u_\beta \circ (T_s^r u_\alpha)^{-1} : u_\alpha(M_\alpha \cap M_\beta) \times T_s^r \mathbb{E} \to u_\beta(M_\beta \cap M_\alpha) \times T_s^r \mathbb{E},$$

coïncident en tout point p avec les applications ${T_s^r}_p(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})$ que nous venons de définir [7].

Nous avons vu, également à la section 2.2, qu'un élément T de $T_s^r \mathbb{E}$ était caractérisé par ses composantes ${T^{i_1 \ldots i_r}}_{j_1 \ldots j_s}$. Cela signifie que la partie principale d'un tenseur $T \in T_s^r M$ est caractérisée par de telles composantes dans chaque carte. Établir la formule de changement de cartes pour ces composantes est identique au cas en dimension finie. Nous effectuons ce calcul dans le cas particulier où M est modelée sur l^2.

Soients $\{{T_\alpha}^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}\}$ les composantes de la partie principale de T écrites dans la carte (u_α, M_α), et $\{{T_\beta}^{k_1 \ldots k_r}{}_{l_1 \ldots l_s}\}$ ces composantes écrites dans la carte (u_β, M_β). En vertu de la multilinéarité et de la continuité d'un tenseur (r, s) sur $\mathbb{E}$, nous avons successivement, en utilisant

5. La démonstration se trouve dans [7].
6. Sa fibre $\mathbb{R}_p$ est modelée sur $\mathbb{R}$ et l'isomorphisme entre $\mathbb{R}_p = \rho^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est évidemment la projection pr_2.
7. Voir [7]

les formules de changement de cartes pour les vecteurs et covecteurs,

$$\begin{aligned}
{T_\beta}^{k_1\ldots k_r}{}_{l_1\ldots l_s} &= T_\beta\left(e^{*k_1},\ldots,e^{*k_r},e_{l_1},\ldots,e_{l_s}\right)\\
&= T_\alpha\left(\left(D(u_\beta\circ {u_\alpha}^{-1})(u_\alpha(p))\right)^*(e^{*k_1}),\ldots,\left(D(u_\beta\circ {u_\alpha}^{-1})(u_\alpha(p))\right)^{-1}(e_{l_s})\right)\\
&= T_\alpha\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\frac{\partial(u_\beta\circ {u_\alpha}^{-1})^{k^1}(y)}{\partial y^{i_1}}\Big|_{y=u_\alpha(p)}e^{*i_1},\ldots,\sum_{j_s=1}^{\infty}\frac{\partial(u_\alpha\circ {u_\beta}^{-1})^{j_s}(y)}{\partial y^{l_s}}\Big|_{y=u_\beta(p)}e_{j_s}\right)\\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s=1}^{\infty}\frac{\partial(u_\beta\circ {u_\alpha}^{-1})^{k^1}(y)}{\partial y^{i_1}}\Big|_{y=u_\alpha(p)}\cdots\frac{\partial(u_\beta\circ {u_\alpha}^{-1})^{k^r}(y)}{\partial y^{i_r}}\Big|_{y=u_\alpha(p)}\\
&\quad\frac{\partial(u_\alpha\circ {u_\beta}^{-1})^{j_1}(y)}{\partial y^{l_1}}\Big|_{y=u_\beta(p)}\cdots\frac{\partial(u_\alpha\circ {u_\beta}^{-1})^{j_s}(y)}{\partial y^{l_s}}\Big|_{y=u_\beta(p)}{T_\alpha}^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s}.
\end{aligned}$$

Cette formule est la même qu'en dimension finie, hormis le fait que les sommations sont des séries. Nous voyons, par ailleurs, qu'un tenseur nul dans une carte est nul dans toutes les cartes.

3.6 Applications entre variétés

Considérons deux variétés M et N.

Définition 3.6.1. *Une application $f : M \to N$ est dite* DIFFÉRENTIABLE *si f est continue et si, pour toute carte locale (u_α, M_α) de M et toute carte locale (v_β, N_β) de N, la représentation en coordonnées de f, c'est-à-dire l'application*

$$v_\beta\circ f\circ u_\alpha^{-1} : U_\alpha\subset\mathbb{E}\to V_\beta\subset\mathbb{F},$$

est différentiable.

Si $N = \mathbb{R}$, alors v_β peut être pris comme l'identité et V_β comme $\mathbb{R}$ tout entier. Une telle application $f : M \to \mathbb{R}$ différentiable est appelée un *champ scalaire*, ou une *fonction*.
Nous donnons la proposition suivante concernant les champs scalaires.

Proposition 3.6.1. *L'ensemble des champs scalaires sur une variété M, noté $\mathcal{F}M$, est une algèbre sous les compositions suivantes :*

$$\begin{aligned}
(f+g)(p) &= f(p)+g(p);\\
(af)(p) &= af(p);\\
(fg)(p) &= f(p)g(p),
\end{aligned}$$

pour tout $f, g \in \mathcal{F}M$ et pour tout $a\in\mathbb{R}$.

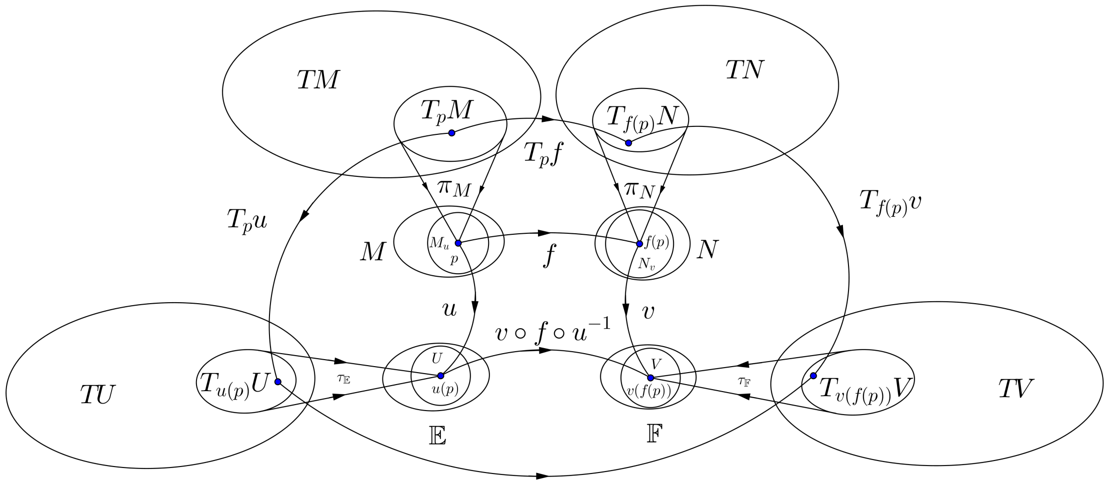
Soit maintenant $f : M \to N$ une application différentiable.

Définition 3.6.2. *Nous construisons la* TANGENTIELLE *de f, $Tf : TM \to TN$, comme l'application représentée localement par la tangentielle de la représentation locale de f. C'est-à-dire que, pour toutes cartes locales (u, M_u) et (v, N_v) de M et N, $U = u(M_u)$ et $V = v(N_v)$, telles que $f(U) \subset V$, nous avons*

$$Tv\circ Tf\circ(Tu)^{-1} = T(v\circ f\circ u^{-1}).$$

Cela se réécrit, pour tout $p \in U$,

$$T_{v(p)}v\circ T_pf\circ(T_{u(p)}u)^{-1} = T_{u(p)}(v\circ f\circ u^{-1}). \tag{3.6.1}$$



$$T_{v(p)}v \circ T_pf \circ (T_{u(p)}u)^{-1} = T_{u(p)}(v \circ f \circ u^{-1})$$

FIGURE 3.2: Tangentielle et sa représentation en coordonnées

La tangentielle est souvent appelée *pushforward*. La Figure 3.2 donne une représentation schématique de la définition de la tangentielle de f. Nous y voyons deux variétés M et N modelées respectivement sur $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$. Les fibrés tangents TM et TN sont aussi dessinés, de même que les fibrés des coordonnés, TU et TV. La définition de la représentation locale de la tangentielle, $T_{v(p)}v \circ T_pf \circ (T_{u(p)}u)^{-1}$, est, finalement, assez intuitive au vu de ce schéma.

Nous présentons un cas particulier important en géométrie différentielle : la différentielle. Supposons que $N = \mathbb{F}$ soit un espace de Hilbert séparable.

Définition 3.6.3. *Soit $f : M \to \mathbb{F}$ une application différentiable.*
Alors, nous définissons la DIFFÉRENTIELLE *de f en $p \in M$ par l'application*

$$Df(p) := pr_2 \circ T_pf : T_pM \to \mathbb{F}, \tag{3.6.2}$$

où $pr_2 : T_{f(p)}\mathbb{F} = \{f(p)\} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ est la projection naturelle.

Notons que la différentielle d'une carte locale, définie au point 5 de la section 3.2, en est un premier exemple. Le deuxième exemple que nous donnons est celui du champ scalaire.

Exemple 3.6.1 (Différentielle d'un champ scalaire)**.**

Soient $f : M \to \mathbb{R}$ un champ scalaire et $p \in M$ quelconque. Alors, la différentielle de f en p est un élément de T_p^*M. En effet, $Df(p) : T_pM \to \mathbb{R}$ est clairement linéaire bornée puisque la tangentielle l'est.

Nous recherchons maintenant la représentation de $Df(p)$ dans une carte (u, M_u).
Par la formule (3.6.1), en prenant v comme l'identité, nous obtenons

$$\begin{aligned}
(T_pf \circ (T_{u(p)}u)^{-1})(u(p), X_{u(p)}) &= \left(T_{u(p)}(f \circ u^{-1})\right)(u(p), X_{u(p)}) \\
&= \left((f \circ u^{-1})(u(p)), \left(D(f \circ u^{-1})(u(p))\right)\left(X_{u(p)}\right)\right) \\
&= \left(f(p), \left(D(f \circ u^{-1})(u(p))\right)\left(X_{u(p)}\right)\right),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la définition de la tangentielle (voir Définition 2.2.3).
Donc, nous avons au final que

$$(Df(p) \circ (T_{u(p)}u)^{-1})(u(p), X_{u(p)}) = \left(D(f \circ u^{-1})(u(p))\right)\left(X_{u(p)}\right).$$

Particularisons au cas $\mathbb{E} = l^2$.
Posons $X_{u(p)} = \sum_{i=1}^{\infty} X^i_{u(p)} e_i$ comme étant la partie principale de la représentation d'un vecteur tangent X en p, et $T^\nu_u(Df(p)) = (u(p), Df(p)_u)$.
Par la formule (3.4.2), nous avons que

$$(Df(p))(X) = \langle (u(p), X_{u(p)}), T^\nu_u(Df(p))\rangle = \langle X_{u(p)}, Df(p)_u\rangle.$$

Or,

$$(Df(p))(X) = (Df(p) \circ (T_{u(p)}u)^{-1}))(u(p), X_{u(p)}) = \left(D(f \circ u^{-1})(u(p))\right)\left(X_{u(p)}\right).$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\langle X_{u(p)}, Df(p)_u\rangle &= \left(D(f \circ u^{-1})(u(p))\right)\left(X_{u(p)}\right)\\ &= \langle \nabla(f \circ u^{-1})(u(p)), X_{u(p)}\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} X^i_{u(p)} \left.\frac{\partial (f \circ u^{-1})(y^1, y^2, \ldots)}{\partial y^i}\right|_{y=u(p)}.\end{aligned}$$

En conclusion, les composantes du covecteur $Df(p)$ dans la carte u sont les composantes du gradient de $f \circ u^{-1}$, càd

$$Df(p)_u = \sum_{i=1}^{\infty} \left.\frac{\partial (f \circ u^{-1})(y^1, y^2, \ldots)}{\partial y^i}\right|_{y=u(p)} e^*_i,$$

où $(e^*_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ est la base duale de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$.
Nous retiendrons de plus que

$$(Df(p))(X) = \sum_{i=1}^{\infty} X^i_{u(p)} \left.\frac{\partial (f \circ u^{-1})(y^1, y^2, \ldots)}{\partial y^i}\right|_{y=u(p)}. \tag{3.6.3}$$

De nouveau, nous retrouvons la même formule qu'en dimension finie, avec une série au lieu d'une somme finie. Notons, par ailleurs, que la valeur de $(Df(p))(X)$ est bien entendu indépendante de la carte choisie.

La différentielle d'un champ scalaire est une notion fondamentale dans l'étude des champs vectoriels, sujet de la section suivante.

3.7 Champs vectoriels

Nous présentons plusieurs définitions et résultats concernant les champs vectoriels. Toutes ces notions sont issues de [7].

Définition 3.7.1 (Champ vectoriel). *Soit M une variété. Un* CHAMP VECTORIEL *sur M est une application différentiable $X : M \to TM$ telle que $\tau \circ X = Id$, où $\tau : TM \to M$ est la projection naturelle du fibré tangent sur l'espace de base M. En d'autres termes, un champ vectoriel est une section du fibré tangent. Nous avons dès lors que, pour tout $p \in M$, $X(p) \in T_pM$.*
L'ensemble des champs vectoriels sur M est noté $\mathcal{B}M$.

Notons que le concept de différentiabilité de X se rapporte à la Définition 3.6.1 car TM est une variété.

Propriété 3.7.1. *L'ensemble $\mathcal{B}M$ est un espace vectoriel réel et un $\mathcal{F}M$-module sous la composition naturelle*

$$(fX)(p) = f(p)X(p),$$

pour tout $f \in \mathcal{F}M$, $X \in \mathcal{B}M$, $p \in M$.

Remarque 3.7.1.

Si (u, M_u) est une carte couvrant $p \in M$, et si $X(p) = (u(p), X_u(p))$, où X_u est la partie principale de X, alors $f(p)X(p)$ est représenté par le vecteur $(u(p), f(p)X_u(p))$ et non pas par $f(p)(u(p), X_u(p))$. En d'autres termes, la multiplication d'un vecteur par un scalaire n'affecte que sa partie principale.

Exemple 3.7.1 (Gauss frames)**.**

Soient (u, M_u) une carte locale et $U = u(M_u)$. Soit $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ une base orthonormale de l'espace de représentation $\mathbb{E}$.
Pour tout i, nous obtenons le champ vectoriel $e_{iu} = (T_pu)^{-1} \circ E_{iu} \circ u : M_u \to TM$, où $E_{iu} : U \mapsto TU$ est défini par $E_{iu}(v) = (v, e_i)$. En général, ce champ vectoriel est simplement noté e_i. Cette notation est abusive car il est évident que ce champ dépend de la carte (u, M_u). Le champ e_i est appelé le i^e *champ vectoriel de base* (relié à la carte (u, M_u)).
Pour tout $p \in M_u$, l'ensemble $\{e_i(p)\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ est une base de T_pM. Ce champ de bases est appelé *Gauss frame* (relié à la carte (u, M_u)).

□

Nous pouvons voir les champs vectoriels comme des dérivations sur M, similairement au cas en dimension finie.

Définition 3.7.2 (Dérivation)**.** *Une* DÉRIVATION *sur M est une application linéaire*

$$\delta : \mathcal{F}M \to \mathcal{F}M$$

telle que

$$\delta(fg) = (\delta f)g + f(\delta g),$$

pour tout $f, g \in \mathcal{F}M$.

Proposition 3.7.1. *A tout champ vectoriel X sur M correspond une unique dérivation δ_X définie par*

$$(\delta_X f)(p) := \langle X(p), Df(p)\rangle,$$

pour tout $p \in M$. Nous noterons également $X(f)$ à la place de $\delta_X f$.
Nous avons de plus que, si $\delta_X = \delta_{X'}$, alors $X = X'$.
Dans le cas où M est de dimension finie, pour chaque dérivation δ, il existe un champ vectoriel X tel que $\delta = \delta_X$.

Nous pouvons définir, parallèlement au cas en dimension finie, le crochet de Lie de deux champs vectoriels.

Proposition 3.7.2 (Crochet de Lie)**.** *Le* CROCHET DE LIE *$[X, Y]$ de deux champs vectoriels $X, Y \in \mathcal{B}M$, défini par*

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad \forall\ f \in \mathcal{F}M,$$

est un champ vectoriel. Il possède, de plus, les quatre propriétés suivantes.

1. *L'application crochet*

$$\begin{array}{rcl} [,] : \mathcal{B}M \times \mathcal{B}M & \to & \mathcal{B}M \\ (X, Y) & \mapsto & [X, Y] \end{array}$$

   est $\mathbb{R}$-bilinéaire.

2. $[X, Y] = -[Y, X]$.

3. $[[X,Y],Z]+[[Z,X],Y]+[[Y,Z],X]=0$ *(identité de Jacobi).*

4. $[X,fY]=f[X,Y]+X(f)Y$.

Cette proposition nous indique donc que l'ensemble des champs vectoriels, muni de l'application crochet de Lie, est une algèbre de Lie.

Nous développons à présent l'expression locale de la Définition 3.7.2.
Considérons une carte locale (u_α, M_α). Notons par X_α et Y_α les parties principales des champs X et Y écrites dans cette carte. Rappelons que, pour tout $p \in M_\alpha$, nous avons

$$X(f)(p) = \left[D(f \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right][X_\alpha(u_\alpha(p))].$$

En effet, il suffit d'appliquer la formule (3.4.2) à la Proposition 3.7.1. Nous pouvons donc écrire que

$$\begin{aligned} X(Y(f))(p) &= [D(Y(f)(p))][X(p)] \\ &= D\left[\left(D(f \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right)(Y_\alpha(u_\alpha(p)))\right][X_\alpha(u_\alpha(p))] \\ &= \left[D^2(f \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right](Y_\alpha(u_\alpha(p)), X_\alpha(u_\alpha(p))) \\ &\quad + \left[D(f \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right][(DY_\alpha(u_\alpha(p)))(X_\alpha(u_\alpha(p)))], \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le Lemme 2.1.11 pour la dernière égalité.
En vertu de la Proposition 2.1.3, nous avons que

$$\left[D^2(f \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right](Y_\alpha(u_\alpha(p)), X_\alpha(u_\alpha(p))) = \left[D^2(f \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right](X_\alpha(u_\alpha(p)), Y_\alpha(u_\alpha(p))).$$

Il s'ensuit que

$$[X,Y](f)(p) = \left[D(f \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right][(DY_\alpha(u_\alpha(p)))(X_\alpha(u_\alpha(p))) - (DX_\alpha(u_\alpha(p)))(Y_\alpha(u_\alpha(p)))].$$

Ceci montre que

$$[X,Y]_\alpha(u_\alpha(p)) = (DY_\alpha(u_\alpha(p)))(X_\alpha(u_\alpha(p))) - (DX_\alpha(u_\alpha(p)))(Y_\alpha(u_\alpha(p))). \tag{3.7.1}$$

Dans le cas où $\mathbb{E} = l^2$, nous pouvons détailler cette formule. Nous obtenons

$$\begin{aligned} [X,Y](f)(p) &= \left\langle \nabla(f \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p)), \left(\left\langle \nabla Y_\alpha^i(u_\alpha(p)), X_\alpha(u_\alpha(p))\right\rangle - \left\langle \nabla X_\alpha^i(u_\alpha(p)), Y_\alpha(u_\alpha(p))\right\rangle\right)_{i\in\mathbb{N}_0}\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left.\frac{\partial(f \circ u_\alpha^{-1})(y)}{\partial y^i}\right|_{y=u_\alpha(p)} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left.\frac{\partial Y_\alpha^i(y)}{\partial y^j}\right|_{y=u_\alpha(p)} X_\alpha^j(u_\alpha(p)) - \left.\frac{\partial X_\alpha^i(y)}{\partial y^j}\right|_{y=u_\alpha(p)} Y_\alpha^j(u_\alpha(p))\right]. \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que

$$[X,Y]_\alpha = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{\partial Y_\alpha^i(y)}{\partial y^j} X_\alpha^j - \frac{\partial X_\alpha^i(y)}{\partial y^j} Y_\alpha^j\right]\right)_{i\in\mathbb{N}_0},$$

soit la même formule qu'en dimension finie, avec une série à la place d'une somme finie.

Nous nous intéressons à un dernier concept concernant les champs vectoriels.

Définition 3.7.3 (Champ vectoriel le long d'une application)**.** *Soient M et N deux variétés et $f : M \to N$ une application différentiable.*
Un CHAMP VECTORIEL V LE LONG DE f *est une application différentiable*

$$V : M \to TN$$

telle que $\tau_N \circ V = f$.
Cela signifie que, pour tout $p \in M$, $V(p) \in T_{f(p)}N$.

Propriété 3.7.2.

1. *L'ensemble $\mathcal{B}_f M$ des champs vectoriel le long de f est un $\mathcal{F}M$-module sous la composition*
$$(fV + gW)(p) = f(p)V(p) + g(p)W(p),$$
pour tout $f, g \in \mathcal{F}M$, $V, W \in \mathcal{B}_f M$, $p \in M$.
2. *La tangentielle Tf de f détermine un morphisme de $\mathcal{F}M$-modules*
$$\begin{array}{rcl} Tf : \mathcal{B}M & \to & \mathcal{B}_f M \\ X & \mapsto & TF \circ X. \end{array}$$
Notons toutefois que $Tf(\mathcal{B}M)$ n'est pas nécessairement égal à $\mathcal{B}_f M$.
3. *L'application f détermine un morphisme de $\mathcal{F}M$-modules*
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}N & \to & \mathcal{B}_f M \\ Y & \mapsto & Y \circ f. \end{array}$$
Cette application n'est pas nécessairement surjective mais nous avons tout de même que tout champ vectoriel sur N détermine un champ vectoriel le long de f.

Exemple 3.7.2 (Champ vectoriel le long d'une courbe)**.**

Soit $c : \mathbb{R} \to M$ une courbe différentiable. Ici, $\mathbb{R}$ est considéré comme la variété triviale de dimension 1. Un champ vectoriel le long de c est une application différentiable
$$\begin{array}{rcl} V : \mathbb{R} & \to & TM \\ t & \mapsto & V(t) \in T_{c(t)}M. \end{array}$$
En vertu de la Propriété 3.7.2, le champ vectoriel de base
$$\begin{array}{rcl} e : \mathbb{R} & \to & T\mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t, 1) \end{array}$$
détermine le champ vectoriel $\frac{dc}{dt}$ le long de c, aussi noté $\dot{c}$, défini par
$$\begin{array}{rcl} \dfrac{dc}{dt} : \mathbb{R} & \to & TM \\ t & \mapsto & T_t c(t, 1). \end{array}$$
Si nous écrivons le champ $\frac{dc}{dt}$ au point t, dans la carte (u, M_u), nous obtenons que
$$T_{c(t)}u\left(\frac{dc}{dt}(t)\right) = \left(C_u(t), \dot{C}_u(t)\right),$$
où nous avons utilisé les notations de la Section 3.3. Cela signifie que le champ vectoriel le long d'une courbe c, évalué en un point t, équivaut au vecteur tangent à cette courbe au point $c(t)$.

De manière plus générale, nous aurions pu définir le champ vectoriel V le long d'une surface k-dimensionnelle[8] s. Dans ce cas, les champs vectoriels de base (t, e_i), $1 \leq i \leq k$, déterminent les champs vectoriels $\frac{\partial s}{\partial t^i}$ le long de s définis par
$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial s}{\partial t^i} : \mathbb{R} & \to & TM \\ t & \mapsto & T_t s(t, e_i). \end{array}$$

8. Une surface k-dimensionnelle d'une variété M est une application différentiable $s : \mathbb{R}^k \to M$.

La représentation dans une carte (u, M_u) donne

$$T_{s(t)}u\left(\frac{\partial s}{\partial t^i}(t)\right) = \left(S_u(t), ((DS_u(t))(e_i))_{k\in\mathbb{N}_0}\right),$$

où $S_u := u \circ s$ est la représentation locale de s. Dans le cas où $\mathbb{E} = l^2$, nous avons que

$$(DS_u(t))(e_i) = \frac{\partial S_u^k}{\partial t^i}(t).$$

3.8 Courbes intégrales et flots

A chaque champ vectoriel correspond une famille de courbes particulières, les courbes intégrales. Elles correspondent aux solutions d'un problème de Cauchy. Soient $X : M \to TM$ un champ vectoriel et $p_0 \in M$.

Définition 3.8.1 (Courbe intégrale). *Une* COURBE INTÉGRALE *du champ vectoriel X, de condition initiale p_0, est une courbe $c : I \to M$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, telle que*

$$\begin{cases} c(0) = p_0 \\ \dot{c}(t) = X(c(t)), \quad \forall\ t \in I. \end{cases} \tag{3.8.1}$$

En d'autres termes, il s'agit d'une courbe locale dont le vecteur tangent, en chacun de ses points, coïncide avec le champ vectoriel évalué en ce point.

Notons que, pour toute condition initiale p_0, il existe un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 tel que le problème (3.8.1) possède une unique solution (voir [9]). Cela implique notamment que, si nous avons deux courbes intégrales c_1 et c_2 sur I_1 et I_2 respectivement, de même condition initiale, alors $c_1 = c_2$ sur $I_1 \cap I_2$. Dans ce cas, $c_1 \cup c_2$ est une courbe intégrale sur $I_1 \cup I_2$. Cela nous mène à la définition de courbe intégrale maximale.

Définition 3.8.2 (Courbe intégrale maximale). *La courbe intégrale du champ vectoriel X, de condition initiale p_0, définie sur l'intervalle ouvert I, est dite* MAXIMALE *s'il n'existe pas de courbe intégrale du même champ X et de même condition initiale p_0 telle que son domaine ne soit pas inclus dans I.*

Nous avons, bien entendu, l'existence d'une courbe intégrale maximale unique pour chaque champ vectoriel et chaque condition initiale. Cette constatation permet de définir une application très utilisée dans la géométrie différentielle : le flot d'un champ vectoriel.

Définition 3.8.3 (Flot d'un champ vectoriel). *Le* FLOT *d'un champ vectoriel X est l'application $\sigma_X : D(\sigma_X) \subset \mathbb{R} \times M \to M$, où*

$$D(\sigma_X) = \bigcup_{p\in M} I_p \times \{p\},$$

I_p étant le domaine de la courbe intégrale maximale de X de condition initiale p, et telle que $\sigma_X(\cdot, p)$ est exactement cette courbe intégrale. Il s'agit, en d'autres termes, de l'ensemble des courbes intégrales de X.

3.9 Dérivée covariante et symboles de Christoffel

Nous désirons construire une dérivation sur l'ensemble des champs vectoriels. Considérons un ouvert U de $\mathbb{E}$ et $\mathcal{B}U$ l'ensemble des champs vectoriels sur U, càd

$$\mathcal{B}U = \{Y : U \to TU \text{ différentiable tq } Y(x) = (x, Y_u(x)) \;\; \forall\, x \in U\},$$

où l'indice u désigne la partie principale du champ vectoriel. Dans ce cas, l'application bilinéaire

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}U \times \mathcal{B}U & \to & \mathcal{B}U \\ (X,Y) & \mapsto & D_X Y, \end{array}$$

où $(D_X Y)(x) := (x, (DY_u(x))\,(X_u(x)))$, est $\mathcal{F}U$-linéaire en son premier argument et une dérivation en son second argument. En effet, nous avons que

$$\begin{array}{rcl} D_{X+Y}Z & = & D_X Z + D_Y Z; \\ D_{fX}Y & = & f D_X Y; \\ D_X(Y+Z) & = & D_X Y + D_X Z; \\ D_X(fY) & = & f D_X Y + X(f)Y, \end{array}$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathcal{B}U$, $f \in \mathcal{F}U$. Les trois premières relations sont évidentes et la quatrième est une conséquence immédiate du Lemme 2.1.3.

Pour tout $X, Y \in \mathcal{B}U$, nous pouvons définir le champ scalaire $\langle X, Y\rangle \in \mathcal{F}U$ par

$$\langle X, Y\rangle(u) = \langle X_u(u), Y_u(u)\rangle.$$

Avec cette définition, nous obtenons une règle de Leibniz sur le "produit scalaire" de deux champs vectoriels :

$$D_X \langle Y, Z\rangle = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle. \tag{3.9.1}$$

Cette propriété est une conséquence directe du Lemme 2.1.4.

Dans le cadre de la variété triviale, D semble être un bon candidat pour une dérivée, étant donné ses propriétés intéressantes. Prenons maintenant une variété M modelée sur $\mathbb{E}$. Soient (u, M_u) une carte de M et $p \in M_u$. Nous pourrions avoir l'idée de construire, similairement au cas présenté ci-dessus, une dérivation

$$\begin{array}{rcl} \nabla : \mathcal{B}M \times \mathcal{B}M & \to & \mathcal{B}M \\ (X,Y) & \mapsto & \nabla_X Y, \end{array}$$

définie localement par

$$(\nabla_X Y)_u(u(p)) = (DY_u(u(p)))(X_u(u(p))),$$

où $(\nabla_X Y)_u, X_u, Y_u : U = u(M_u) \to \mathbb{E}$ sont les parties principales de $\nabla_X Y$, X et Y, écrites dans la carte (u, M_u). Le problème survient lorsque nous désirons changer de carte.

Considérons deux cartes (u_α, M_α) et (u_β, M_β) couvrant le point $p \in M$. Notons X_α (resp. X_β) la partie principale, écrite dans la carte α (resp. β), de tout champ vectoriel X.
Il est évident que nous voudrions que $(\nabla_X Y)_\alpha$ et $(\nabla_X Y)_\beta$ représentent le même champ vectoriel. Cela se traduit, en utilisant la formule (3.2.2), par

$$(\nabla_X Y)_\beta(u_\beta(p)) = \left[D(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})(u_\alpha(p))\right]\left[(\nabla_X Y)_\alpha(u_\alpha(p))\right].$$

Or, nous avons

$$\begin{array}{rcl} (\nabla_X Y)_\beta(u_\beta(p)) & = & \left[DY_\beta(u_\beta(p))\right]\left[X_\beta(u_\beta(p))\right] \\ & = & \left[DY_\beta(u_\beta(p))\right]\left[(D(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})(u_\alpha(p)))(X_\alpha(u_\alpha(p)))\right] \\ & = & \left[(DY_\beta(u_\beta(p))) \circ (D(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})(u_\alpha(p)))\right](X_\alpha(u_\alpha(p))) \\ & = & \left[D\left(Y_\beta \circ (u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})\right)(u_\alpha(p))\right](X_\alpha(u_\alpha(p))), \end{array}$$

où nous avons appliqué la règle de dérivation de la composée de deux fonctions (voir la Propriété 2.1.1).

Remarquons ensuite que $Y_\beta(u_\beta(p)) = (D(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})(u_\alpha(p)))(Y_\alpha(u_\alpha(p)))$. Mais nous avons également que $Y_\beta(u_\beta(p)) = [Y_\beta \circ (u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})](u_\alpha(p))$. Nous en déduisons que

$$[Y_\beta \circ (u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})] = (D(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})(\cdot))(Y_\alpha(\cdot)).$$

Cela nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned}(\nabla_X Y)_\beta(u_\beta(p)) &= \left(D\left[(D(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})(u_\alpha(p)))(Y_\alpha(u_\alpha(p)))\right]\right)(X_\alpha(u_\alpha(p)))\\ &= \left[D^2(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})(u_\alpha(p))\right](Y_\alpha(u_\alpha(p)), X_\alpha(u_\alpha(p)))\\ &\quad + \left(D(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})(u_\alpha(p))\right)[(DY_\alpha(u_\alpha(p)))(X_\alpha(u_\alpha(p)))]\\ &= \left[D^2(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})(u_\alpha(p))\right](Y_\alpha(u_\alpha(p)), X_\alpha(u_\alpha(p)))\\ &\quad + \left[D(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})(u_\alpha(p))\right][(\nabla_X Y)_\alpha(u_\alpha(p))],\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le Lemme 2.1.6 à la deuxième égalité. Nous en déduisons que, en général,

$$(\nabla_X Y)_\beta(u_\beta(p)) \neq \left[D(u_\beta \circ {u_\alpha}^{-1})(u_\alpha(p))\right][(\nabla_X Y)_\alpha(u_\alpha(p))].$$

L'application ∇ n'est donc pas bien définie globalement. Pour surmonter ce problème, nous sommes contraint d'introduire de nouvelles structures : les *symboles de Christoffel.*

Définition 3.9.1 (Symboles de Christoffel)**.** *Soient M une variété modelée sur $\mathbb{E}$ et $\{(M_\alpha, u_\alpha)\}_\alpha$ un atlas différentiable avec $U_\alpha = u_\alpha(M_\alpha)$. Supposons que, pour toute carte (M_α, u_α), nous ayons une application différentiable*

$$\Gamma_\alpha : U_\alpha \to L(\mathbb{E}, \mathbb{E}, \mathbb{E}'; \mathbb{R}) = L(\mathbb{E}, \mathbb{E}; \mathbb{E}).$$

Supposons de plus que, si (M_β, u_β) est une autre carte, les applications Γ_α et Γ_β, réduites respectivement sur $u_\alpha(M_\alpha \cap M_\beta)$ et $u_\beta(M_\beta \cap M_\alpha)$, sont reliées par

$$\left(D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right)\circ\Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) = D^2(u_\beta\circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p)) + \Gamma_\beta(u_\beta(p))\circ\left(D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p)) \times (u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right). \tag{3.9.2}$$

Dans ce cas, les $(\Gamma_\alpha)_\alpha$ sont appelés SYMBOLES DE CHRISTOFFEL.

Définition 3.9.2 (Dérivée covariante)**.** *Soit $(\Gamma_\alpha)_\alpha$ une famille de symboles de Christoffel sur M. Alors la* DÉRIVÉE COVARIANTE *(reliée à ces symboles de Christoffel) est l'application*

$$\begin{aligned}\nabla : \mathcal{B}M \times \mathcal{B}M &\to \mathcal{B}M\\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y,\end{aligned}$$

définie localement par

$$(\nabla_X Y)_\alpha(u_\alpha(p)) = (DY_\alpha(u_\alpha(p)))\,(X_\alpha(u_\alpha(p))) + (\Gamma_\alpha(u_\alpha(p)))\,(X_\alpha(u_\alpha(p)), Y_\alpha(u_\alpha(p))), \tag{3.9.3}$$

où l'indice α désigne toujours la partie principale de la représentation dans la carte α.

Cette fois-ci, la dérivée covariante est bien définie globalement. Pour le voir, il suffit de remarquer, en se servant de ce que nous avons montré dans le cas précédent, que

$$\begin{aligned}(\nabla_X Y)_\beta(u_\beta(p)) &= (DY_\beta(u_\beta(p)))\,(X_\beta(u_\beta(p))) + (\Gamma_\beta(u_\beta(p)))\,(X_\beta(u_\beta(p)), Y_\beta(u_\beta(p)))\\ &= \left[D^2(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right][Y_\alpha(u_\alpha(p)), X_\alpha(u_\alpha(p))]\\ &\quad + \left[D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right][(DY_\alpha(u_\alpha(p)))(X_\alpha(u_\alpha(p)))]\\ &\quad + (\Gamma_\beta(u_\beta(p)))\,(X_\beta(u_\beta(p)), Y_\beta(u_\beta(p)))\\ &= \left[D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right][(\Gamma_\alpha(u_\alpha(p)))\,(X_\alpha(u_\alpha(p)), Y_\alpha(u_\alpha(p)))]\\ &\quad + \left[D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right][(DY_\alpha(u_\alpha(p)))(X_\alpha(u_\alpha(p)))]\\ &= \left[D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right][(\nabla_X Y)_\alpha(u_\alpha(p))],\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la formule (3.9.2) pour l'avant-dernière égalité.

Proposition 3.9.1. *L'application*

$$\begin{array}{rcl}\nabla : \mathcal{B}M \times \mathcal{B}M & \to & \mathcal{B}M \\ (X,Y) & \mapsto & \nabla_X Y\end{array}$$

est $\mathcal{F}M$ linéaire en son premier argument et une $\mathcal{F}M$ dérivation en son second. Cela signifie que

$$\begin{array}{rcl}\nabla_{fX_1+gX_2}Y & = & f\nabla_{X_1}Y + g\nabla_{X_2}Y; \\ \nabla_X(aY_1+bY_2) & = & a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2; \\ \nabla_X(fY) & = & X(f)Y + f\nabla_X Y,\end{array}$$

pour tout $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathcal{B}M$, $f, g \in \mathcal{F}M$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Cette proposition est évidente étant donné la Définition 3.9.2.

Nous particularisons dans le cas où M est modelée sur l^2.
Nous savons que, pour toute carte (M_α, u_α), l'application $\Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \in L(l^2, l^2, (l^2)'; \mathbb{R})$ peut être représentée par ses composantes ${(\Gamma_\alpha)^i}_{jk}(u_\alpha(p))$. Grâce à cela, nous pouvons écrire, pour tous champs $X, Y \in \mathcal{B}M$,

$$\left(\Gamma_\alpha(u_\alpha(p))\right)\left(X_\alpha(u_\alpha(p)), Y_\alpha(u_\alpha(p))\right) = \left(\sum_{j,k=1}^{\infty} {(\Gamma_\alpha)^i}_{jk}(u_\alpha(p)) X_\alpha^j(u_\alpha(p)) Y_\alpha^k(u_\alpha(p))\right)_{i\in\mathbb{N}_0}.$$

A partir de cette équation, nous pouvons réécrire la formule (3.9.3) de la manière suivante

$$\begin{array}{rcl}(\nabla_X Y)_\alpha(u_\alpha(p)) & = & \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \left.\frac{\partial Y_\alpha^i(y)}{\partial y^j}\right|_{y=u_\alpha(p)} X_\alpha^j(u_\alpha(p)) + \sum_{j,k=1}^{\infty} {(\Gamma_\alpha)^i}_{jk}(u_\alpha(p)) X_\alpha^j(u_\alpha(p)) Y_\alpha^k(u_\alpha(p))\right)_{i\in\mathbb{N}_0} \\ & = & \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} X_\alpha^j(u_\alpha(p)) \left(\left.\frac{\partial Y_\alpha^i(y)}{\partial y^j}\right|_{y=u_\alpha(p)} + \sum_{k=1}^{\infty} {(\Gamma_\alpha)^i}_{jk}(u_\alpha(p)) Y_\alpha^k(u_\alpha(p))\right)\right)_{i\in\mathbb{N}_0}.\end{array}$$

Nous avons donc, en termes de champs, que

$$(\nabla_X Y)_\alpha = \left(\sum_{j=1}^{\infty} X_\alpha^j \left(\frac{\partial Y_\alpha^i(y)}{\partial y^j} + \sum_{k=1}^{\infty} {(\Gamma_\alpha)^i}_{jk} Y_\alpha^k\right)\right)_{i\in\mathbb{N}_0}.$$

Nous remarquons alors qu'il s'agit, de nouveau, de la même formule que dans le cas en dimension finie (voir l'équation (1.1.6)), hormis le fait que nous avons des séries au lieu de sommes finies.

Pour ce qui est du changement de cartes, nous composons à gauche l'équation (3.9.2) par $D(u_\alpha \circ u_\beta^{-1})(u_\beta(p))$, en utilisant l'équation (2.1.5), pour obtenir

$$\begin{array}{rcl}\Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) & = & D(u_\alpha \circ u_\beta^{-1})(u_\beta(p)) \circ D^2(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p)) \\ & + & D(u_\alpha \circ u_\beta^{-1})(u_\beta(p)) \circ \Gamma_\beta(u_\beta(p)) \circ \left(D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p)) \times D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right).\end{array}$$

Cela se traduit, en composantes, par

$$\begin{array}{l}{(\Gamma_\alpha)^i}_{jk}(u_\alpha(p)) = \displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} \left.\frac{\partial(u_\alpha \circ u_\beta^{-1})^i(y)}{\partial y^l}\right|_{y=u_\beta(p)} \cdot \left.\frac{\partial^2(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})^l(y)}{\partial y^j \partial y^k}\right|_{y=u_\alpha(p)} \\ + \displaystyle\sum_{l,m,n=1}^{\infty} \left.\frac{\partial(u_\alpha \circ u_\beta^{-1})^i(y)}{\partial y^l}\right|_{y=u_\beta(p)} \cdot \left.\frac{\partial(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})^m(y)}{\partial y^j}\right|_{y=u_\alpha(p)} \cdot \left.\frac{\partial(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})^n(y)}{\partial y^k}\right|_{y=u_\alpha(p)} \cdot {(\Gamma_\beta)^l}_{mn}(u_\beta(p)).\end{array}$$

Nous reconnaissons la formule du changement de cartes en dimension finie, avec des séries pour remplacer les sommes finies.

3.10 Tenseurs de torsion et de courbure

Dans cette section, nous définissons deux tenseurs très importants dans le cadre de la géométrie riemannienne. Il s'agit des tenseurs de torsion et de courbure. Comme leurs noms l'indiquent, ces objets contiennent de l'information concernant la structure géométrique de la variété concernée.

Proposition 3.10.1. *Considérons ∇ une dérivée covariante sur une variété M.*

1. *∇ détermine un unique champ tensoriel T de type $(1,2)$, le* TENSEUR DE TORSION, *tel que, pour tout $X, Y \in \mathcal{B}M$ et pour toute carte (u_α, M_α), nous ayons*

$$[T(X,Y)]_\alpha = \Gamma_\alpha(X_\alpha, Y_\alpha) - \Gamma_\alpha(Y_\alpha, X_\alpha),$$

où l'indice α indique qu'il s'agit de la partie principale écrite dans la carte α.
De plus, $T(X,Y) = -T(Y,X)$.

2. *∇ détermine un unique champ tensoriel R de type $(1,3)$, le* TENSEUR DE COURBURE, *tel que, pour tout $X, Y, Z \in \mathcal{B}M$ et pour toute carte (u_α, M_α), nous ayons*

$$\begin{aligned}[R(X,Y)Z]_\alpha &= [(D\Gamma_\alpha)(X_\alpha)](Y_\alpha, Z_\alpha) - [(D\Gamma_\alpha)(Y_\alpha)](X_\alpha, Z_\alpha) \\ &+ \Gamma_\alpha(X_\alpha, \Gamma_\alpha(Y_\alpha, Z_\alpha)) - \Gamma_\alpha(Y_\alpha, \Gamma_\alpha(X_\alpha, Z_\alpha)),\end{aligned}$$

où l'indice α indique qu'il s'agit de la partie principale écrite dans la carte α.
De plus, $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ et, si T est nul, R vérifie l'identité de Bianchi :

$$R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0. \tag{3.10.1}$$

La démonstration de cette proposition se trouve dans [7]. Une autre propriété est cependant souvent utilisée pour définir ces deux tenseurs.

Propriété 3.10.1. *Les tenseurs de torsion et courbure vérifient les égalités suivantes, pour tout $X, Y, Z \in \mathcal{B}M$,*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]; \tag{3.10.2}$$
$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{3.10.3}$$

Preuve
Soient un point $p \in M$ arbitraire et une carte (u_α, M_α) couvrant p.
Comme d'habitude, nous notons par un indice α la partie principale d'un champ exprimée dans la carte considérée. Nous avons, successivement,

$$\begin{aligned}&(\nabla_X Y)_\alpha(u_\alpha(p)) - (\nabla_Y X)_\alpha(u_\alpha(p)) - [X,Y]_\alpha(u_\alpha(p)) \\ =\ & [DY_\alpha(u_\alpha(p))]\,[X_\alpha(u_\alpha(p))] + \Gamma_\alpha(u_\alpha(p))\,(X_\alpha(u_\alpha(p)), Y_\alpha(u_\alpha(p))) \\ &- [DX_\alpha(u_\alpha(p))]\,[Y_\alpha(u_\alpha(p))] - \Gamma_\alpha(u_\alpha(p))\,(Y_\alpha(u_\alpha(p)), X_\alpha(u_\alpha(p))) \\ &- [DY_\alpha(u_\alpha(p))]\,[X_\alpha(u_\alpha(p))] + [DX_\alpha(u_\alpha(p))]\,[Y_\alpha(u_\alpha(p))] \\ =\ & \Gamma_\alpha(u_\alpha(p))\,(X_\alpha(u_\alpha(p)), Y_\alpha(u_\alpha(p))) - \Gamma_\alpha(u_\alpha(p))\,(Y_\alpha(u_\alpha(p)), X_\alpha(u_\alpha(p))) \\ =\ & [T(X,Y)]_\alpha(u_\alpha(p)),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les formules (3.9.3) et (3.7.1). Nous avons donc bien la première égalité.

Pour la seconde égalité, nous avons, successivement,

$$\begin{aligned}
& (\nabla_X \nabla_Y Z)_\alpha(u_\alpha(p)) - (\nabla_Y \nabla_X Z)_\alpha(u_\alpha(p)) - (\nabla_{[X,Y]} Z)_\alpha(u_\alpha(p)) \\
= \; & [D(\nabla_Y Z)_\alpha(u_\alpha(p))] \, [X_\alpha(u_\alpha(p))] + \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (X_\alpha(u_\alpha(p)), (\nabla_Y Z)_\alpha(u_\alpha(p))) \\
& - [D(\nabla_X Z)_\alpha(u_\alpha(p))] \, [Y_\alpha(u_\alpha(p))] - \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (Y_\alpha(u_\alpha(p)), (\nabla_X Z)_\alpha(u_\alpha(p))) \\
& - [DZ_\alpha(u_\alpha(p))] \, [[X,Y]_\alpha(u_\alpha(p))] - \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, ([X,Y]_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p))) \\
= \; & [D\,([DZ_\alpha(u_\alpha(p))] \, [Y_\alpha(u_\alpha(p))] + \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (Y_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p)))))] \, [X_\alpha(u_\alpha(p))] \\
& + \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (X_\alpha(u_\alpha(p)), [DZ_\alpha(u_\alpha(p))] \, [Y_\alpha(u_\alpha(p))] + \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (Y_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p)))) \\
& - [D\,([DZ_\alpha(u_\alpha(p))] \, [X_\alpha(u_\alpha(p))] + \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (X_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p)))))] \, [Y_\alpha(u_\alpha(p))] \\
& - \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (Y_\alpha(u_\alpha(p)), [DZ_\alpha(u_\alpha(p))] \, [X_\alpha(u_\alpha(p))] + \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (X_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p)))) \\
& - [DZ_\alpha(u_\alpha(p))] \, [[DY_\alpha(u_\alpha(p))] \, [X_\alpha(u_\alpha(p))] - [DX_\alpha(u_\alpha(p))] \, [Y_\alpha(u_\alpha(p))]] \\
& - \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, ([DY_\alpha(u_\alpha(p))] \, [X_\alpha(u_\alpha(p))] - [DX_\alpha(u_\alpha(p))] \, [Y_\alpha(u_\alpha(p))] \, , Z_\alpha(u_\alpha(p))) \\
= \; & \left[D^2 Z_\alpha(u_\alpha(p))\right] \, (Y_\alpha(u_\alpha(p)), X_\alpha(u_\alpha(p))) + [DZ_\alpha(u_\alpha(p))] \, [(DY_\alpha(u_\alpha(p))) \, (X_\alpha(u_\alpha(p)))] \\
& + [D\,(\Gamma_\alpha(u_\alpha(p))(Y_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p))))] \, [X_\alpha(u_\alpha(p))] \\
& + \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (X_\alpha(u_\alpha(p)), [DZ_\alpha(u_\alpha(p))] \, [Y_\alpha(u_\alpha(p))]) \\
& + \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (X_\alpha(u_\alpha(p)), \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (Y_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p)))) \\
& - \left[D^2 Z_\alpha(u_\alpha(p))\right] \, (X_\alpha(u_\alpha(p)), Y_\alpha(u_\alpha(p))) - [DZ_\alpha(u_\alpha(p))] \, [(DX_\alpha(u_\alpha(p))) \, (Y_\alpha(u_\alpha(p)))] \\
& - [D\,(\Gamma_\alpha(u_\alpha(p))(X_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p))))] \, [Y_\alpha(u_\alpha(p))] \\
& - \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (Y_\alpha(u_\alpha(p)), [DZ_\alpha(u_\alpha(p))] \, [X_\alpha(u_\alpha(p))]) \\
& - \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (Y_\alpha(u_\alpha(p)), \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (X_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p)))) \\
& - [DZ_\alpha(u_\alpha(p))] \, [(DY_\alpha(u_\alpha(p))) \, (X_\alpha(u_\alpha(p)))] + [DZ_\alpha(u_\alpha(p))] \, [(DX_\alpha(u_\alpha(p))) \, (Y_\alpha(u_\alpha(p)))] \\
& - \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, ([DY_\alpha(u_\alpha(p))] \, [X_\alpha(u_\alpha(p))] \, , Z_\alpha(u_\alpha(p))) \\
& + \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, ([DX_\alpha(u_\alpha(p))] \, [Y_\alpha(u_\alpha(p))] \, , Z_\alpha(u_\alpha(p))) \, ,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le Lemme 2.1.11 pour obtenir les termes en dérivée seconde. Désignons cette expression par $(\star)$.
En considérant $\Gamma_\alpha(u_\alpha(p))$ comme un élément de $L(\mathbb{E}; L(\mathbb{E}; \mathbb{E}))$, nous pouvons écrire

$$\Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (Y_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p))) = [\Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (Y_\alpha(u_\alpha(p)))] \, [Z_\alpha(u_\alpha(p))] \, .$$

En appliquant le Lemme 2.1.10 en prenant $f(u) = \Gamma_\alpha(u) \, (Y_\alpha(u))$ et $g(u) = Z_\alpha(u)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& [D\,(\Gamma_\alpha(u_\alpha(p))(Y_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p))))] \, [X_\alpha(u_\alpha(p))] \\
= \; & [(D\,(\Gamma_\alpha(u_\alpha(p))(Y_\alpha(u_\alpha(p))))) \, (X_\alpha(u_\alpha(p)))] \, [Z_\alpha(u_\alpha(p))] \\
& + [\Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (Y_\alpha(u_\alpha(p)))] \, [(DZ_\alpha(u_\alpha(p))) \, (X_\alpha(u_\alpha(p)))] \, .
\end{aligned}$$

En appliquant une seconde fois ce lemme, en prenant cette fois-ci $f(u) = \Gamma_\alpha(u)$ et $g(u) = Y_\alpha(u)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& [D\,(\Gamma_\alpha(u_\alpha(p))(Y_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p))))] \, [X_\alpha(u_\alpha(p))] \\
= \; & [(D\Gamma_\alpha(u_\alpha(p))) \, (X_\alpha(u_\alpha(p)))] \, (Y_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p))) \\
& + \Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, ([DY_\alpha(u_\alpha(p))] \, [X_\alpha(u_\alpha(p))] \, , Z_\alpha(u_\alpha(p))) \\
& + [\Gamma_\alpha(u_\alpha(p)) \, (Y_\alpha(u_\alpha(p)))] \, [(DZ_\alpha(u_\alpha(p))) \, (X_\alpha(u_\alpha(p)))] \, .
\end{aligned}$$

En calculant le terme symétrique (en intervertissant X, et Y dans cette expression) et en injectant dans ($\star$), nous obtenons, après élimination des termes opposés [9],

$$\begin{aligned}
& (\nabla_X \nabla_Y Z)_\alpha(u_\alpha(p)) - (\nabla_Y \nabla_X Z)_\alpha(u_\alpha(p)) - (\nabla_{[X,Y]} Z)_\alpha(u_\alpha(p)) \\
= \ & [(D\Gamma_\alpha(u_\alpha(p)))\,(X_\alpha(u_\alpha(p)))]\,(Y_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p))) \\
& - [(D\Gamma_\alpha(u_\alpha(p)))\,(Y_\alpha(u_\alpha(p)))]\,(X_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p))) \\
& + \Gamma_\alpha(u_\alpha(p))\,(X_\alpha(u_\alpha(p)), \Gamma_\alpha(u_\alpha(p))\,(Y_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p)))) \\
& - \Gamma_\alpha(u_\alpha(p))\,(Y_\alpha(u_\alpha(p)), \Gamma_\alpha(u_\alpha(p))\,(X_\alpha(u_\alpha(p)), Z_\alpha(u_\alpha(p)))) \\
= \ & [R(X,Y)Z]_\alpha\,(u_\alpha(p)).
\end{aligned}$$

La seconde égalité est donc démontrée.

□

Nous particularisons au cas où $\mathbb{E} = l^2$ pour donner les composantes $(T_\alpha)^i{}_{jk}$ et $(R_\alpha)^i{}_{jkl}$ en fonction des $(\Gamma_\alpha)^i{}_{jk}$. Pour le tenseur de torsion, nous avons que

$$\begin{aligned}
(T_\alpha)^i{}_{jk} &:= T_\alpha\left(e_{j_\alpha}, e_{k\alpha}\right) e_\alpha^{*\,i} \\
&= \Gamma_\alpha\left(e_{j_\alpha}, e_{k\alpha}\right) e_\alpha^{*\,i} - \Gamma_\alpha\left(e_{k\alpha}, e_{j_\alpha}\right) e_\alpha^{*\,i} \\
&= (\Gamma_\alpha)^i{}_{jk} - (\Gamma_\alpha)^i{}_{kj}.
\end{aligned}$$

Concernant le tenseur de courbure,

$$\begin{aligned}
(R_\alpha)^i{}_{jkl} &:= R_\alpha(e_{j_\alpha}, e_{k\alpha}, e_{l\alpha}) e_\alpha^{*\,i} \\
&= \left[(D\Gamma_\alpha)(e_{j_\alpha})\right](e_{k\alpha}, e_{l\alpha}) e_\alpha^{*\,i} - \left[(D\Gamma_\alpha)(e_{k\alpha})\right](e_{j_\alpha}, e_{l\alpha}) e_\alpha^{*\,i} \\
&\quad + \Gamma_\alpha\left(e_{j_\alpha}, \Gamma_\alpha(e_{k\alpha}, e_{l\alpha})\right) e_\alpha^{*\,i} - \Gamma_\alpha\left(e_{k\alpha}, \Gamma_\alpha(e_{j_\alpha}, e_{l\alpha})\right) e_\alpha^{*\,i}.
\end{aligned}$$

Or, dans la preuve de la Propriété 3.10.1, nous avons montré que, pour tous champs $X, Y, Z \in \mathcal{B}M$,

$$\begin{aligned}
\left[D\left(\Gamma_\alpha(Y_\alpha, Z_\alpha)\right)\right][X_\alpha] &= \left[(D\Gamma_\alpha)\,(X_\alpha)\right](Y_\alpha, Z_\alpha)) \\
&\quad + \Gamma_\alpha\left([DY_\alpha]\,[X_\alpha], Z_\alpha\right) \\
&\quad + \left[\Gamma_\alpha\left(Y_\alpha\right)\right]\left[(DZ_\alpha)\,(X_\alpha)\right].
\end{aligned}$$

Nous avons donc que

$$\begin{aligned}
\left[(D\Gamma_\alpha)(e_{j_\alpha})\right](e_{k\alpha}, e_{l\alpha}) &= \left[D\left(\Gamma_\alpha(e_{k\alpha}, e_{l\alpha})\right)\right]\left[e_{j_\alpha}\right] \\
&\quad - \Gamma_\alpha\left(\left[De_{k\alpha}\right]\left[e_{j_\alpha}\right], e_{l\alpha}\right) \\
&\quad - \Gamma_\alpha\left(e_{k\alpha}, \left[De_{l\alpha}\right]\left[e_{j_\alpha}\right]\right).
\end{aligned}$$

Par définition, $e_{n\alpha}$ est constant sur M_α, pour tout n, et donc $[De_{k\alpha}]\left[e_{j_\alpha}\right] = 0 = [De_{l\alpha}]\left[e_{j_\alpha}\right]$. Cela implique que

$$\left[(D\Gamma_\alpha)(e_{j_\alpha})\right](e_{k\alpha}, e_{l\alpha}) = \left[D\left(\Gamma_\alpha(e_{k\alpha}, e_{l\alpha})\right)\right]\left[e_{j_\alpha}\right].$$

En remarquant que

$$\Gamma_\alpha(e_{k\alpha}, e_{l\alpha}) = \left((\Gamma_\alpha)^i{}_{kl}\right)_{i\in\mathbb{N}_0},$$

nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\left[D\left(\Gamma_\alpha(e_{k\alpha}, e_{l\alpha})\right)\right]\left[e_{j_\alpha}\right] &= \left(\left\langle \nabla(\Gamma_\alpha)^i{}_{kl}, e_{j_\alpha}\right\rangle\right)_{i\in\mathbb{N}_0} \\
&= \left(\frac{\partial (\Gamma_\alpha)^i{}_{kl}(u)}{\partial u^j}\right)_{i\in\mathbb{N}_0},
\end{aligned}$$

9. Rappelons que la dérivée seconde est symétrique en vertu de la Proposition 2.1.3.

et donc

$$[D\left(\Gamma_\alpha(e_{k\alpha}, e_{l\alpha})\right)]\left[e_{j\alpha}\right] e_\alpha^{*\,i} \quad = \quad \frac{\partial(\Gamma_\alpha)^i{}_{kl}(u)}{\partial u^j}.$$

Pour la suite, nous avons que

$$\begin{aligned}
\Gamma_\alpha\left(e_{j\alpha}, \Gamma_\alpha(e_{k\alpha}, e_{l\alpha})\right) e_\alpha^{*\,i} &= \Gamma_\alpha\left(e_{j\alpha}, \left((\Gamma_\alpha)^\lambda{}_{kl}\right)_{\lambda\in\mathbb{N}_0}\right) e_\alpha^{*\,i} \\
&= \left\langle \left(\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} (\Gamma_\alpha)^\rho{}_{\mu\nu}(e_{j\alpha})^\mu (\Gamma_\alpha)^\nu{}_{kl}\right)_{\rho\in\mathbb{N}_0}, e_\alpha^{*\,i}\right\rangle \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} (\Gamma_\alpha)^i{}_{j\nu}(\Gamma_\alpha)^\nu{}_{kl}.
\end{aligned}$$

En rassemblant tous ces éléments, nous obtenons finalement que

$$(R_\alpha)^i{}_{jkl} \quad = \quad \frac{\partial(\Gamma_\alpha)^i{}_{kl}(u)}{\partial u^j} - \frac{\partial(\Gamma_\alpha)^i{}_{jl}(u)}{\partial u^k} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\Gamma_\alpha)^i{}_{j\nu}(\Gamma_\alpha)^\nu{}_{kl} - \sum_{\nu=1}^{\infty} (\Gamma_\alpha)^i{}_{k\nu}(\Gamma_\alpha)^\nu{}_{jl}.$$

Nous retrouvons en définitive les mêmes formules qu'en dimension finie (voir les formules (1.1.10) et (1.1.11)) , en remplaçant, comme à chaque fois jusqu'ici, les sommes par des séries. [10]

3.11 Transport parallèle et géodésiques

Le transport parallèle d'un champ vectoriel le long d'une courbe est une notion indispensable à la définition des géodésiques. Un champ vectoriel sera transporté parallèlement le long d'une courbe si sa dérivée covariante, le long du champ des vecteurs tangents à cette courbe, est nulle. Une géodésique sera alors une courbe dont le champ des vecteurs qui lui sont tangents est transporté parallèlement le long d'elle-même.

Avant de parler de transport parallèle, nous devons introduire la notion de dérivée covariante le long d'une application.

Définition 3.11.1 (Dérivée covariante le long d'une application)**.** *Soient M et N deux variétés différentiables modelées respectivement sur $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$. Considérons une application différentiable $f : M \to N$ et supposons que N est dotée d'une dérivée covariante ∇. Soit $V : M \to TN$ un champ vectoriel le long de f et soit X un champ vectoriel sur M. Alors, nous définissons $\nabla_X V$, la* DÉRIVÉE COVARIANTE LE LONG DE f*, localement de la manière suivante.*

Soient (u_α, M_α) une carte de M et (v_β, N_β) une carte de N telles que $f(M_\alpha) \subset N_\beta$. Nous utilisons les notations suivantes

- — $\Gamma_\beta : u_\beta(N_\beta) \to L(\mathbb{F}, \mathbb{F}; \mathbb{F})$ *est le symbole de Christoffel de la carte β de N ;*
- — $F_{\beta\alpha} := v_\beta \circ f \circ u_\alpha^{-1}$ *est la représentation de f dans les cartes α et β ;*
- — $X_\alpha : u_\alpha(M_\alpha) \to \mathbb{E}$ *est la représentation de la partie principale de X dans la carte α ;*
- — $V_{\beta\alpha} : u_\alpha(M_\alpha) \to \mathbb{F}$ *est la représentation de la partie principale de V dans les cartes α et β ;*
- — $(\nabla_X V)_{\beta\alpha} : u_\alpha(M_\alpha) \to \mathbb{F}$ *est la représentation de la partie principale de $\nabla_X V$ dans les cartes α et β.*

Dans ce cas, nous posons

$$(\nabla_X V)_{\beta\alpha} = [DV_{\beta\alpha}]\left[X_\alpha\right] + \Gamma_\beta(F_{\beta\alpha})\left([DF_{\beta\alpha}]\left[X_\alpha\right], V_{\beta\alpha}\right). \qquad (3.11.1)$$

10. Nous constatons toutefois une permutation des indices covariants par rapport à la formule (1.1.11) : cela est simplement dû au fait que, dans le cas en dimension finie, les composantes $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ sont souvent définies par $\langle dx^\alpha, R(e_\gamma, e_\delta)e_\beta\rangle$ au lieu de $\langle dx^\alpha, R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta\rangle$.

Malgré le caractère local de cette définition, la dérivée covariante le long de f est bien définie globalement et donne une application $\nabla : \mathcal{B}M \times \mathcal{B}_f M \to \mathcal{B}_f M$ qui est $\mathcal{F}M$-linéaire en son premier argument et une $\mathcal{F}M$-dérivation en son second (voir [7]). Notons, de plus, que si nous prenons $M = N$, $\mathbb{E} = \mathbb{F}$ et $f = id$, alors nous retrouvons la Définition 3.9.2.

Mettons-nous dans le cas particulier où $\mathbb{E} = \mathbb{F} = l^2$ et gardons les notations de la Définition 3.11.1. Dans ce cas, nous obtenons

$$\begin{aligned}
(\nabla_X V)_{\beta\alpha} &= [DV_{\beta\alpha}]\,[X_\alpha] + \Gamma_\beta(F_{\beta\alpha})\,([DF_{\beta\alpha}]\,[X_\alpha]\,, V_{\beta\alpha}) \\
&= \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\partial V^i_{\beta\alpha}}{\partial u^l} X^l_\alpha\right)_{i\in\mathbb{N}_0} + \Gamma_\beta(F_{\beta\alpha}) \left(\left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\partial F^j_{\beta\alpha}}{\partial u^l} X^l_\alpha\right)_{j\in\mathbb{N}_0}, V_{\beta\alpha}\right) \\
&= \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\partial V^i_{\beta\alpha}}{\partial u^l} X^l_\alpha + \sum_{j,k=1}^{\infty} (\Gamma_\beta)^i{}_{jk}(F_{\beta\alpha}) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\partial F^j_{\beta\alpha}}{\partial u^l} X^l_\alpha\right) V^k_{\beta\alpha}\right)_{i\in\mathbb{N}_0} \\
&= \left(\sum_{l=1}^{\infty} X^l_\alpha \left[\frac{\partial V^i_{\beta\alpha}}{\partial u^l} + \sum_{j,k=1}^{\infty} (\Gamma_\beta)^i{}_{jk}(F_{\beta\alpha}) \frac{\partial F^j_{\beta\alpha}}{\partial u^l} V^k_{\beta\alpha}\right]\right)_{i\in\mathbb{N}_0}.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant une courbe $c : \mathbb{R} \to M$ différentiable et soit $e = (t, 1)$ le champ vectoriel de base de la variété triviale $\mathbb{R}$. Considérons $V : R \to TM$ un champ vectoriel le long de c. Alors, $(\nabla_e V)(t)$ se note $\frac{\nabla V(t)}{dt}$ et vaut, dans la carte (u_α, M_α),

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\nabla V(t)}{dt}\right)_\alpha &= [DV_\alpha(t)]\,[1] + \Gamma_\alpha(C_\alpha(t))\,([DC_\alpha(t)]\,[1]\,, V_\alpha(t)) \\
&= \dot{V}_\alpha(t) + \Gamma_\alpha(C_\alpha(t)) \left(\dot{C}_\alpha(t), V_\alpha(t)\right),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les notations de la Section 3.3. Si $\mathbb{E} = l^2$, nous obtenons

$$\left(\frac{\nabla V(t)}{dt}\right)_\alpha = \left(\frac{dV^i_\alpha(t)}{dt} + \sum_{j,k=1}^{\infty} (\Gamma_\alpha)^i{}_{jk}(C_\alpha(t)) \frac{dC^j_\alpha(t)}{dt} V^k_\alpha(t)\right)_{i\in\mathbb{N}_0}.$$

Plus généralement, si nous avons une surface m-dimensionnelle s sur M, alors, pour tout $j = 1, \ldots, m$, $(\nabla_{e_j} V)(t)$ se note $\frac{\nabla V(t)}{\partial t^j}$ et vaut

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\nabla V(t)}{\partial t^j}\right)_\alpha &= [DV_\alpha(t)]\,[e_j] + \Gamma_\alpha(S_\alpha(t))\,([DS_\alpha(t)]\,[e_j]\,, V_\alpha(t)) \\
&= \left(\frac{\partial V^i_\alpha(t)}{\partial t^j} + \sum_{k,l=1}^{\infty} (\Gamma_\alpha)^i{}_{kl}(S_\alpha(t)) \frac{\partial S^k_\alpha(t)}{\partial t^j} V^l_\alpha(t)\right)_{i\in\mathbb{N}_0}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant définir la notion de transport parallèle.

Définition 3.11.2 (Champ vectoriel transporté parallèlement le long d'une courbe)**.** *Soit $V : \mathbb{R} \to M$ un champ vectoriel le long d'une courbe c.*
Le champ V est dit TRANSPORTÉ PARALLÈLEMENT LE LONG DE c *si, pour tout t,*

$$\frac{\nabla V(t)}{dt} = 0.$$

Cela signifie, en quelque sorte, qu'un champ de vecteurs est transporté parallèlement le long d'une courbe si sa variation est nulle dans cette direction. Nous rejoignons donc l'idée intuitive de parallélisme.

Dans l'Exemple 3.7.2, nous avons montré que toute courbe déterminait un champ particulier le long d'elle-même : $\frac{dc}{dt}$, le champ des vecteurs tangents le long de la courbe, aussi noté $\dot{c}$. Il semble dès lors logique de définir une droite sur une variété comme étant une courbe telle que son champ de vecteurs tangents ne varie pas le long de cette courbe. Cela explique la définition suivante.

Définition 3.11.3 (Géodésiques)**.** *Une* GÉODÉSIQUE *de M est une courbe $c :]a,b[\to M$ telle que $\frac{dc}{dt}$ est transporté parallèlement le long de c, càd*

$$\frac{\nabla \dot{c}(t)}{dt} = 0 \qquad \forall t \in]a,b[.$$

Cette équation se réécrit localement, dans le cas où $\mathbb{E} = l^2$, comme

$$\frac{d^2 C^i_\alpha(t)}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^{\infty} (\Gamma_\alpha)^i{}_{jk}(C_\alpha(t)) \frac{dC^j_\alpha(t)}{dt}\frac{dC^k_\alpha(t)}{dt} = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{N}_0. \tag{3.11.2}$$

Cette formule est l'*équation des géodésiques* et est identique à celle en dimension finie (voir (1.1.9)), hormis la somme qui est devenue une série.

3.12 Métrique riemannienne

Nous introduisons maintenant la notion de distance sur les variétés de dimension infinie. Cela se fait de manière similaire à ce qui existe en dimension finie.

Définition 3.12.1 (Métrique riemannienne)**.** *Une métrique riemannienne sur une variété M est une section g du fibré $T^0_2 M$ telle que, pour tout $p \in M$, $g(p)$ soit symétrique et définie positive. Cela signifie que, pour toute carte (u_α, M_α) couvrant p, il existe $\epsilon_\alpha > 0$ tel que, pour tout $X \in T_pM$,*

$$g_\alpha(u_\alpha(p))\,(X_\alpha, X_\alpha) \quad \geq \quad \epsilon_\alpha \langle X_\alpha, X_\alpha \rangle . \tag{3.12.1}$$

Une métrique riemannienne est donc une distance sur l'espace tangent. Notons que, si l'équation (3.12.1) est vérifiée pour une carte (u_α, M_α), alors elle l'est pour n'importe quelle autre carte (u_β, M_β). En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \langle X_\beta, X_\beta \rangle &= ||X_\beta||^2 \\ &= ||\left[D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))\right][X_\alpha]||^2 \\ &\leq ||D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))||^2 ||X_\alpha||^2 \end{aligned}$$

car $D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))$ est un opérateur borné par définition.
Comme $u_\beta \circ u_\alpha^{-1}$ est une fonction non constante sur son domaine (le cas contraire n'est pas envisageable car une fonction de coordonnées constantes n'a pas de sens), nous avons que $||D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))|| \neq 0$ et donc

$$||X_\alpha||^2 \geq \frac{||X_\beta||^2}{||D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))||^2}.$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} g_\beta(u_\beta(p))\,(X_\beta, X_\beta) &= g_\alpha(u_\alpha(p))\,(X_\alpha, X_\alpha) && (3.12.2)\\ &\geq \epsilon_\alpha ||X_\alpha||^2 && (3.12.3)\\ &\geq \frac{\epsilon_\alpha}{||D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))||^2} ||X_\beta||^2 && (3.12.4)\\ &= \frac{\epsilon_\alpha}{||D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))||^2} \langle X_\beta, X_\beta \rangle . && (3.12.5) \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de poser

$$\epsilon_\beta = \frac{\epsilon_\alpha}{||D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))||^2}$$

pour obtenir l'équation (3.12.1) dans la carte β.

Nous avons qu'une métrique riemannienne est caractérisée par un champ de matrices carrées symétriques de dimension infinie et définies positives. En effet, soit $((g_\alpha)_{\mu\nu})_{\mu,\nu\in\mathbb{N}_0}$ la matrice de g écrite dans la carte α. Pour tout $p \in M_\alpha$, nous avons que $g_\alpha(u_\alpha(p))$ est un élément de $L(\mathbb{E},\mathbb{E};\mathbb{R})$. Or $L(\mathbb{E},\mathbb{E};\mathbb{R}) \cong L(\mathbb{E},\mathbb{E}') \cong L(E,E)$. Cette matrice peut donc être vue comme un opérateur hermitien défini positif G_α linéaire borné de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$: G_α est défini par $g_\alpha(u_\alpha(p))\,(X,Y) = \langle X, G_\alpha Y\rangle$, pour tout $X,Y \in \mathbb{E}$. Ses valeurs propres λ sont réelles et vérifient $G_\alpha X = \lambda X$, pour certains vecteurs $X \in \mathbb{E}\backslash\{0\}$. Nous avons donc que $\langle X, G_\alpha X\rangle = \lambda \langle X, X\rangle = g_\alpha(u_\alpha(p))\,(X,X)$. Or, $g_\alpha(u_\alpha(p))\,(X,X) \geq \epsilon_\alpha \langle X,X\rangle$. Nous en déduisons que $\lambda \geq \epsilon_\alpha > 0$ et donc G est bien défini positif.

Après ces considérations, nous pouvons citer le théorème suivant dont la preuve est disponible dans [7].

Théorème 3.12.1. *Sur toute variété différentiable, il existe une métrique riemannienne.*

Nous nous intéressons maintenant aux dérivées covariantes qui conservent la norme d'un vecteur lorsqu'il est transporté parallèlement le long d'une courbe. Cela généralise la notion de transport parallèle habituelle dans l'espace euclidien : deux vecteurs parallèles ont toujours la même norme. Une telle dérivée covariante sera dite *riemannienne*. La proposition suivante montre que cela est équivalent à imposer une règle de Leibniz sur la métrique.

Proposition 3.12.1. *Une dérivée covariante ∇ est riemannienne si et seulement si elle vérifie, pour tous champs vectoriels $X, X, Z \in \mathcal{B}M$,*

$$X\left(g(Y,Z)\right) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \tag{3.12.6}$$

De nouveau, nous renvoyons à [7] pour la preuve de ce résultat.
De cette notion, nous pouvons obtenir un théorème fondamental en géométrie riemannienne. Tout comme en dimension finie, il existe une et une seule dérivée covariante qui soit riemannienne et sans torsion : la *connexion de Levi-Civita.*

Théorème 3.12.2 (Connection de Levi-Civita)**.** *Sur une variété riemannienne, il existe une et une seule dérivée covariante qui soit riemannienne et dont la torsion est nulle. Elle est appelée la* connexion de Levi-Civita *et elle est caractérisée par la relation suivante, pour tous champs vectoriels $X, Y, Z \in \mathcal{B}M$,*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X\left(g(Y,Z)\right) + Y\left(g(Z,X)\right) - Z\left(g(X,Y)\right) \\ &\quad + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]). \end{aligned}$$

Une fois de plus, nous ne nous intéressons pas à la démonstration de ce théorème (disponible dans [7]) mais nous nous penchons sur l'écriture locale en composantes de cette expression.

Soit (u_α, M_α) une carte locale de la variété. Posons $(X,Y,Z) = (e_{\alpha i}, e_{\alpha j}, e_{\alpha k}) \in \mathcal{B}M \times \mathcal{B}M \times \mathcal{B}M$ dans la formule du Théorème 3.12.2. Comme $\nabla_{e_{\alpha i}} e_{\alpha j} = \left((\Gamma_\alpha)^l{}_{ij}\right)_{l\in\mathbb{N}_0}$, nous avons que

$$2g_\alpha(\nabla_{e_{\alpha i}} e_{\alpha j}, e_{\alpha k}) = 2\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} (g_\alpha)_{\mu\nu} (\Gamma_\alpha)^\mu{}_{ij} \delta_k^\nu = 2\sum_{l=1}^{\infty} (g_\alpha)_{lk} (\Gamma_\alpha)^l{}_{ij}.$$

Nous avons donc la partie gauche de l'équation. Pour la partie droite, nous obtenons

$$\begin{aligned}
e_{\alpha i}\left(g_\alpha(e_{\alpha j}, e_{\alpha k})\right) &= \frac{\partial (g_\alpha)_{jk}}{\partial u^i}, \\
e_{\alpha j}\left(g_\alpha(e_{\alpha k}, e_{\alpha i})\right) &= \frac{\partial (g_\alpha)_{ki}}{\partial u^j}, \\
e_{\alpha k}\left(g_\alpha(e_{\alpha i}, e_{\alpha j})\right) &= \frac{\partial (g_\alpha)_{ij}}{\partial u^k}, \\
g_\alpha(e_{\alpha k}, [e_{\alpha i}, e_{\alpha j}]) &= 0, \\
g_\alpha(e_{\alpha j}, [e_{\alpha k}, e_{\alpha i}]) &= 0, \\
g_\alpha(e_{\alpha i}, [e_{\alpha j}, e_{\alpha k}]) &= 0,
\end{aligned}$$

où les trois dernières égalités proviennent du fait que le crochet de Lie de champs vectoriels de base est nul. Finalement, en regroupant les différents éléments, nous obtenons

$$2\sum_{l=1}^{\infty}(g_\alpha)_{lk}(\Gamma_\alpha)^l{}_{ij} = \frac{\partial (g_\alpha)_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial (g_\alpha)_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial (g_\alpha)_{ij}}{\partial u^k}. \tag{3.12.7}$$

Rappelons que g_α définit un opérateur hermitien, linéaire borné et défini positif $G_\alpha : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, donné par $g_\alpha(X, Y) = \langle X, G_\alpha Y\rangle$. De plus, cet opérateur est inversible. Pour le montrer, utilisons le Théorème 1.2.2 de représentation de Riesz-Fréchet. Pour tout élément $b \in \mathbb{E}$, $f_b(x) = \langle x, b\rangle$ est un élément de $\mathbb{E}'$. Or, si nous introduisons le produit scalaire g_α sur $\mathbb{E}$, nous conservons la même structure hilbertienne sur $\mathbb{E}$ [11]. Nous avons donc, par le Théorème 1.2.2, que la fonctionnelle f_b peut s'écrire sous la forme $f_a^g(x) = g_\alpha(x, a) = \langle x, G_\alpha a\rangle$, pour un certain $a \in \mathbb{E}$ unique. Autrement dit, pour tout $b \in \mathbb{E}$, il existe un et un seul $a \in \mathbb{E}$ tel que $\langle x, b\rangle = \langle x, G_\alpha a\rangle$, pour tout $x \in \mathbb{E}$. Cela signifie que G_α est bijectif.

Considérons $((g_\alpha)^{\mu\nu})_{\mu,\nu\in\mathbb{N}_0}$ la matrice de l'opérateur G_α^{-1} [12]. Nous avons donc que

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}(g_\alpha)^{i\mu}(g_\alpha)_{\mu j} = \delta^i_j, \tag{3.12.8}$$

pour tout $i, j \in \mathbb{N}_0$. Nous pouvons pré-multiplier l'expression (3.12.7) par $\sum_{k=1}^{\infty}(g_\alpha)^{rk}$ pour obtenir, finalement,

$$(\Gamma_\alpha)^r{}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(g_\alpha)^{rk}\left(\frac{\partial (g_\alpha)_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial (g_\alpha)_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial (g_\alpha)_{ij}}{\partial u^k}\right). \tag{3.12.9}$$

Nous retrouvons la même formule qu'en dimension finie, toujours avec une série remplaçant la somme.

Dans ce chapitre, nous avons étudié un grand nombre de notions généralisant le cas de la dimension finie. Globalement, les différences sont minimes. Nous avons notamment constaté que la plupart des formules tensorielles de géométrie différentielle de dimension finie sont transposables au cas des variétés hilbertiennes simplement en remplaçant toutes les sommations d'indices par des séries. Même si cela peut sembler évident, le travail pour y parvenir s'est révélé conséquent et est intéressant mathématiquement parlant. L'outil central de cette généralisation est la différentiabilité définie au Chapitre 2. Une fois que cette notion est maîtrisée, tous les développements

11. En effet, comme G_α est borné, les normes $\sqrt{g_\alpha(\cdot,\cdot)} = \sqrt{\langle \cdot, G_\alpha(\cdot)\rangle}$ et $\sqrt{\langle \cdot,\cdot\rangle}$ sont équivalentes. Les suites convergentes sur $(\mathbb{E}, g_\alpha)$ sont donc les mêmes que celles sur $(\mathbb{E}, \langle\rangle)$ et les espaces duaux topologiques de ces deux espaces de Hilbert sont également identiques.

12. Les indices μ et ν sont écrits en haut car il s'agit de la matrice d'un opérateur de $L(\mathbb{E}', \mathbb{E}'; \mathbb{R})$. En effet, si nous considérons que $g_\alpha : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$, alors $g_\alpha^{-1} : \mathbb{E}' \to \mathbb{E}$ peut être vu comme un élément de $L(\mathbb{E}', \mathbb{E}'; \mathbb{R})$, soit une métrique sur l'espace cotangent.

de ce chapitre en découlent. La généralisation à la dimension infinie est rendue aisée grâce au caractère très fort de cette définition de la différentiabilité. Certaines constructions, comme l'espace tangent, nécessitent toutefois une définition plus générale, et plus éloignée, de celle que nous retrouvons dans le Chapitre 1. Mais, bien sûr, poser l'espace de représentation comme étant $\mathbb{R}^n$ dans ce chapitre nous donne une théorie équivalente à celle rappelée dans le Chapitre 1. Il s'agit bel et bien d'une généralisation.

Le plus important à retenir de ce chapitre est que la géométrie différentielle en dimension infinie existe et est parfaitement définie. De plus, les formules sont similaires à celles en dimension finie. Nous attirons l'attention sur le fait que ces formules, tout à fait calculables en dimension finie, le sont beaucoup moins en dimension infinie. Les séries sont des objets difficiles à calculer, ce qui rend cette théorie difficilement exploitable.

Nous allons maintenant, dans le chapitre suivant, tenter d'utiliser ce formalisme géométrique pour l'adapter à la mécanique quantique.

Chapitre 4

Vers une géométrisation de la mécanique quantique

Après avoir étudié en détail les variétés différentiables réelles de dimension infinie, ce chapitre propose une application de ce formalisme à la mécanique quantique. Obtenir un cadre géométrique pour cette théorie serait élégant. Mais nous pouvons espérer que cette géométrisation apporte d'autres avantages. Le cadre géométrique de la théorie de la gravitation universelle a permis de mettre en place la relativité générale et la notion de courbure de l'espace-temps. La mécanique classique est finalement un cas limite de cette théorie générale. Dès lors, instaurer un cadre géométrique à la mécanique quantique pourrait aussi donner lieu à des généralisations intéressantes. Mais un échec est toujours possible : la géométrie différentielle n'est peut-être pas du tout adaptée au formalisme de la mécanique quantique.

Dans ce chapitre, nous expliquons comment la mécanique quantique pourrait se formaliser géométriquement et nous mettons en avant les éventuelles difficultés ou restrictions que cela impliquerait. La Section 4.1 donne quelques rappels concernant les postulats de la mécanique quantique. Les sections suivantes sont totalement personnelles et originales. Elles consistent en une proposition de géométrisation de la mécanique quantique par l'utilisation des variétés hilbertiennes. Les changements de carte linéaires et unitaires sont étudiés dans la Section 4.2. Nous nous en servons à la Section 4.3 pour adapter le premier postulat de la mécanique quantique. Dans les trois dernières sections, nous nous interrogeons sur les conséquences d'une telle modification, positives comme négatives.

4.1 Rappel des principaux postulats de la mécanique quantique

Nous ne donnerons pas de rappels détaillés de la mécanique quantique. Nous nous contentons de donner différents postulats de cette dernière, tout en les expliquant brièvement. Nous nous basons sur [4] pour cette section et nous conservons la même structure que dans cet ouvrage. Il ne s'agit probablement pas de l'axiomatique la plus rigoureuse que nous puissions trouver dans la littérature, mais elle est suffisante pour ce que nous désirons réaliser. Nous ne justifions aucun de ces postulats car cela ne rentre pas dans le cadre de ce mémoire. Précisons toutefois que nous présupposons une connaissance minimale de la mécanique classique.

Postulat 4.1.1 (Vecteur d'état)**.** *L'ensemble de tous les états possibles d'un système quantique donné forme un espace de Hilbert séparable complexe. Chaque état du système est représenté par un vecteur non nul de cet espace. Réciproquement, tout vecteur non nul de cet espace représente un état. Si un vecteur d'état est multiplié par un scalaire non nul, le vecteur résultant représente le même état.*

En général, l'espace de Hilbert considéré est un espace fonctionnel. Un vecteur d'état est donc représenté par une fonction $\psi(x)$. Le vecteur d'état dans lequel se trouve le système au temps t

est dénoté par $\psi(x,t)$. Presque toute l'information à propos du système physique correspondant peut être obtenue à partir du vecteur $\psi(x,t)$. Le produit scalaire de l'espace de Hilbert que nous considérons est défini par

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int \overline{\phi(x)}\psi(x)dx.$$

Nous pouvons dès lors introduire les notations de Dirac. Tout vecteur d'état peut s'écrire sous la forme $|\psi\rangle$. Nous voyons qu'à tout vecteur d'état $|\psi\rangle$ correspond un élément du dual, noté $\langle\psi|$, dont l'action sur un vecteur $|\phi\rangle$ est définie par le produit scalaire $\langle\psi|\phi\rangle$.
La séparabilité de l'espace de Hilbert implique qu'il existe une suite orthonormale complète de vecteurs $\{|\psi_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ vérifiant $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$ et telle que tout vecteur $|\psi\rangle$ s'écrit

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i|\psi_i\rangle,$$

où $c_i = \langle\psi_i|\psi\rangle$.

Postulat 4.1.2 (Observables)**.** *A chaque observable physique en mécanique quantique correspond un opérateur linéaire hermitien $\hat{A}$ de l'espace de Hilbert dans lui-même, qui possède une suite orthonormale complète de vecteurs propres $\{|\psi_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, associés aux valeurs propres $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, i.e.*

$$\hat{A}\psi_n = \lambda_n\psi_n,$$

pour tout n.
Réciproquement, à chaque opérateur linéaire hermitien de cet espace de Hilbert correspond une observable physique. Les seules valeurs possibles d'une observable physique sont valeurs propres de l'opérateur correspondant.

Nous ne nous attardons pas sur le caractère particulier d'un tel postulat, les principes de la mécanique quantique sont fondamentalement différents de ceux de la mécanique classique. Précisons seulement quelques faits importants d'un point de vue mathématique. Le caractère hermitien est demandé afin d'obtenir des valeurs propres réelles, et donc des valeurs physiquement acceptables pour les observables. Nous avons utilisé une notation qui présuppose un ensemble discret de valeurs propres. Il s'agit d'une restriction : rien n'empêche le spectre d'un opérateur de posséder une partie continue. Pour des raisons de simplicité, nous ne considérons que des opérateurs à spectre discret dans ce mémoire. Cela nous permet, entre autres, d'affirmer qu'il existe une suite orthonormale complète de vecteurs propres pour chaque observable. Tout vecteur $\psi(x)$ se décompose de manière unique dans cette base :

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\psi_n|\psi\rangle\psi_n(x).$$

Le vecteur $\psi(x)$ possède donc une représentation particulière à chaque observable, donnée par les composantes $(\langle\psi_n|\psi\rangle)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Le passage d'une représentation à une autre se fait via un opérateur unitaire de changement de base.

Postulat 4.1.3 (Résultat d'une mesure)**.** *Soit une observable $\hat{A}$ dotée de la base de vecteurs propres $\{|\psi_n\rangle\}$ et des valeurs propres correspondantes $\{\lambda_n\}$. Alors, la probabilité que le résultat d'une mesure de l'observable $\hat{A}$ donne la valeur λ_n pour le vecteur normalisé $\psi(x)$ est*

$$P(\lambda_n) = |\langle\psi_n|\psi\rangle|^2.$$

Dans ce cas, le système se trouve dans l'état $\psi_n(x)$ après la mesure.

Tout d'abord, tout vecteur d'état peut être normalisé en le divisant par sa norme. Pour tout vecteur d'état, il existe donc un vecteur normalisé représentant le même état [1]. Ensuite, ce postulat impose que le résultat d'une mesure ne peut pas être connu à l'avance et qu'il peut varier selon les mesures. Le résultat est donc une valeur aléatoire prise parmi les valeurs propres de l'observable suivant une loi de probabilité. Cette approche probabiliste est à l'opposé de l'approche totalement déterministe de la mécanique classique. Notons toutefois que, pour un vecteur propre de l'observable, le résultat de la mesure sera assurément la valeur propre correspondante.

Nous terminons cet échantillon sommaire (et incomplet) des postulats de la mécanique quantique en nous intéressant à l'évolution temporelle de l'état d'un système.

Postulat 4.1.4 (Equation de Schrödinger)**.** *Soit $\hat{H}$ l'opérateur représentant l'observable correspondant à l'énergie totale de l'état d'un système. Alors, si un système physique n'est perturbé par aucune expérience, l'évolution du vecteur d'état $\psi(x,t)$ est régie par l'équation suivante dite de Schrödinger*

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi(x,t), \tag{4.1.1}$$

où $\hbar$ est la constante universelle donnée par $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ avec $h = 4.14\times 10^{-21} MeV$ sec, la constante de Planck.

Cette équation est importante car elle signifie que, si à un certain temps initial t_0 l'état du système est fixé, alors le vecteur état suit une trajectoire unique dans le temps régie par cette équation.

Ceci termine les courts rappels de mécanique quantique. Le but était de donner les quelques postulats à partir desquels nous allons travailler dans la suite du mémoire.

4.2 Cartes linéairement et unitairement reliées

La linéarité est un aspect fondamental de la mécanique quantique, comme nous le prouvent les différents postulats de la section précédente. Il est donc primordial d'étudier un minimum les changements de carte linéaires d'une variété différentiable. Les changements de carte unitaires en sont un cas particulier important, c'est pourquoi nous les étudions également. Nous rappelons que cette section est entièrement personnelle et que les concepts qui y sont développés sont totalement originaux.

Considérons une variété hilbertienne M modelée sur un espace de Hilbert séparable $\mathbb{E}$.

Définition 4.2.1 (Changement de carte linéaire)**.** *Soient (u_α, M_α) et (u_β, M_β) deux cartes locales telles que $M_\alpha \cap M_\beta \neq \emptyset$. Le changement de carte sera dit* LINÉAIRE *si l'application $u_\beta \circ u_\alpha^{-1}$ est linéaire sur son domaine [2].*

Considérons une carte (u_α, M_α) de notre variété. Nous définissons l'ensemble des cartes qui lui sont linéairement reliées.

Définition 4.2.2. *Posons*

$$Lin_0\,(u_\alpha, M_\alpha) := \{(u_\alpha, M_\alpha)\}$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$,

$$Lin_n := \left\{(u_\beta, M_\beta) : \exists\,(u_\gamma, M_\gamma) \in Lin_{n-1}\,(u_\alpha, M_\alpha)\ \ tq\ M_\gamma \cap M_\beta \neq \emptyset\ et\ u_\beta \circ u_\gamma^{-1}\ est\ linéaire\right\}.$$

1. Il en existe même une infinité puisque la multiplication d'un vecteur par un nombre complexe de module unité conserve la norme du vecteur initial et représente le même état.
2. Le domaine de cette application est $u_\alpha(M_\alpha \cap M_\beta) \subset U_\alpha$ et son image est $u_\beta(M_\alpha \cap M_\beta) \subset U_\beta$.

L'ensemble $Lin\,(u_\alpha, M_\alpha)$ *est défini par*

$$Lin\,(u_\alpha, M_\alpha) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Lin_n\,(u_\alpha, M_\alpha)\,.$$

Si $(u_\beta, M_\beta) \in Lin\,(u_\alpha, M_\alpha)$*, alors* (u_β, M_β) *est dite* LINÉAIREMENT RELIÉE *à* (u_α, M_α)*.*

Avant d'expliquer cette notion, nous donnons tout de suite les deux propriétés suivantes.

Propriété 4.2.1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $(u_\beta, M_\beta) \in Lin_n\,(u_\alpha, M_\alpha)$ *si et seulement si il existe une suite finie de cartes locales* $\{(u_i, M_i)\}_{i=0}^{n}$ *, vérifiant* $(u_0, M_0) = (u_\alpha, M_\alpha)$ *et* $(u_n, M_n) = (u_\beta, M_\beta)$*, telles que, pour tout* $i = 1, \ldots, n$*,* $M_i \cap M_{i-1} \neq \emptyset$ *et* $u_i \circ u_{i-1}^{-1}$ *est linéaire.*

Preuve
La démonstration se fait par récurrence sur n.
Si $n = 0$, la propriété est évidente.
Supposons que la propriété soit vraie pour un certain $n \geq 0$ et montrons qu'elle est aussi vraie pour $n + 1$.
Nous avons que $(u_\beta, M_\beta) \in Lin_{n+1}\,(u_\alpha, M_\alpha)$ si et seulement si il existe une carte locale $(u_\gamma, M_\gamma) \in Lin_n\,(u_\alpha, M_\alpha)$ telle que $M_\beta \cap M_\gamma \neq \emptyset$ et $u_\beta \circ u_\gamma^{-1}$ est linéaire. Or, par hypothèse de récurrence, une telle carte (u_γ, M_γ) est caractérisée par l'existence d'une suite finie de cartes locales $\{(u_i, M_i)\}_{i=0}^{n}$ vérifiant $(u_0, M_0) = (u_\alpha, M_\alpha)$, $(u_n, M_n) = (u_\gamma, M_\gamma)$ et, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $M_i \cap M_{i-1} \neq \emptyset$ et $u_i \circ u_{i-1}^{-1}$ est linéaire. Il nous suffit dès lors de poser $(u_{n+1}, M_{n+1}) = (u_\beta, M_\beta)$ et la propriété est prouvée pour $n + 1$.

□

Propriété 4.2.2. *La relation entre cartes locales « être linéairement reliée à » est une relation d'équivalence. En conséquence,* $Lin\,(u_\alpha, M_\alpha)$ *est la classe d'équivalence de* (u_α, M_α)*.*

Preuve
Cette relation est réflexive puisque $(u_\alpha, M_\alpha) \in Lin\,(u_\alpha, M_\alpha)$.
Concernant la symétrie, il suffit de constater que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_\beta, M_\beta) \in Lin_n\,(u_\alpha, M_\alpha)$ si et seulement si $(u_\alpha, M_\alpha) \in Lin_n\,(u_\beta, M_\beta)$ puisqu'il suffit d'ordonner dans le sens contraire la suite finie de cartes définie à la Propriété 4.2.1.
La démonstration de la transitivité est un peu plus longue. Soient $(u_\beta, M_\beta) \in Lin\,(u_\alpha, M_\alpha)$ et $(u_\gamma, M_\gamma) \in Lin\,(u_\beta, M_\beta)$. Nous avons donc qu'il existe deux suites finies de cartes $\left\{(u_i^1, M_i^1)\right\}_{i=0}^{n_1}$ et $\left\{(u_i^2, M_i^2)\right\}_{i=0}^{n_2}$ vérifiant

- $(u_0^1, M_0^1) = (u_\alpha, M_\alpha)\,;$
- $(u_{n_1}^1, M_{n_1}^1) = (u_0^2, M_0^2) = (u_\beta, M_\beta)\,;$
- $(u_{n_2}^2, M_{n_2}^2) = (u_\gamma, M_\gamma)\,;$
- $M_i^1 \cap M_{i-1}^1 \neq \emptyset\,;$
- $u_i^1 \circ {u_{i-1}^1}^{-1}$ est linéaire, pour tout $i = 1, \ldots, n_1\,;$
- $M_i^2 \cap M_{i-1}^2 \neq \emptyset\,;$
- $u_i^2 \circ {u_{i-1}^2}^{-1}$ est linéaire, pour tout $i = 1, \ldots, n_2$.

En construisant la suite $\{(u_i, M_i)\}_{i=0}^{n_1+n_2}$ définie par $(u_i, M_i) = (u_i^1, M_i^1)$, pour tout $i = 0, \ldots, n_1$, et $(u_{n_1+i}, M_{n_1+i}) = (u_i^2, M_i^2)$, pour tout $i = 0, \ldots, n_2$, nous prouvons, par la Propriété 4.2.1, que $(u_\gamma, M_\gamma) \in Lin_{n_1+n_2}\,(u_\alpha, M_\alpha)$, et donc la transitivité est vérifiée.

Par conséquent, il s'agit bien d'une relation d'équivalence et, pour toute carte (u_α, M_α), sa classe d'équivalence est formée des éléments (u_β, M_β) qui lui sont linéairement reliés, càd $Lin\,(u_\alpha, M_\alpha)$.

□

La notion de cartes linéairement reliées est importante à définir. En effet, deux cartes disjointes (u_α, M_α) et (u_β, M_β), c'est-à-dire telles que $M_\alpha \cap M_\beta = \emptyset$, pourraient très bien être reliées par une troisième carte (u_γ, M_γ), vérifiant $M_\gamma \cap M_\beta \neq \emptyset$ et $M_\gamma \cap M_\alpha \neq \emptyset$, telle que les changements de carte $u_\gamma \circ u_\beta^{-1}$ et $u_\gamma \circ u_\alpha^{-1}$ soient linéaires. En quelque sorte, les cartes α et β sont reliées linéairement par l'intermédiaire d'une troisième carte. Cela signifie que, si nous prolongeons les changements de cartes $u_\beta \circ u_\gamma^{-1}$ et $u_\gamma \circ u_\alpha^{-1}$ sur $\mathbb{E}$ tout entier, l'application $u_\beta \circ u_\alpha^{-1} := (u_\beta \circ u_\gamma^{-1}) \circ (u_\gamma \circ u_\alpha^{-1})$ peut être définie et est linéaire.

Remarque 4.2.1 (Prolongement des changements de carte)**.**

Les changements de carte linéaires peuvent toujours être prolongés sur $\mathbb{E}$ tout entier car ils sont définis sur des ouverts et sont linéaires continus. En effet, si $f : U \subset \mathbb{E} \to V \subset \mathbb{E}$ est une application linéaire continue sur l'ouvert U, alors nous pouvons étendre linéairement f sur $\mathbb{E}$ tout entier de la manière suivante.

Soit $u = \left(u^i\right)_{i\in\mathbb{N}_0} \in U$ quelconque. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $u_j = \left(u^i + \delta^i_j \delta\right)_{i\in\mathbb{N}_0} = u + \delta e_j \in U$ car U est ouvert. Dès lors, pour tout $v = \left(v^i\right)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{E}$, nous avons $v = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v^i}{\delta}(u_i - u)$. Nous définissons logiquement

$$f(v) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v^i}{\delta}(f(u_i) - f(u)).$$

Il nous faut vérifier que f est bien définie. Pour cela, il suffit de voir que

$$\begin{aligned}
||f(v)||^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{{v^i}^2}{\delta^2} ||f(u_i) - f(u)||^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{{v^i}^2}{\delta^2} \left(||f(u_i)|| + ||f(u)||\right)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{{v^i}^2}{\delta^2} ||f||^2 \left(||u_i|| + ||u||\right)^2.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
||u_i||^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} (u^j + \delta^j_i \delta)^2 \\
&= ||u||^2 + 2\delta u^i + \delta^2 \\
&\leq ||u||^2 + 2\delta ||u|| + \delta^2.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
||f(v)||^2 &\leq \frac{||f||^2 \left(\sqrt{||u||^2 + 2||u||\delta + \delta^2} + ||u||\right)^2}{\delta^2} ||v||^2 \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Donc, f est bien définie, continue et $f(v) \in \mathbb{E}$. La linéarité de f est évidente de par sa forme.

□

Cela nous permet de constater que, si deux cartes (u_α, M_α) et (u_β, M_β) sont linéairement reliées, alors nous pouvons toujours définir formellement un changement de carte linéaire entre les deux, même si les deux cartes sont disjointes. En effet, si nous considérons la suite de cartes

$\{(u_i, M_i)\}_{i=0}^{n}$ caractérisant le lien linéaire entre les deux cartes, nous pouvons, par la Remarque 4.2.1, prolonger tous les changements de carte $u_i \circ u_{i-1}^{-1}$ sur $\mathbb{E}$ tout entier. Il est dès lors possible de définir le changement de carte formel $u_\beta \circ u_\alpha^{-1} := (u_\beta \circ u_{n-1}^{-1}) \circ (u_{n-1} \circ u_{n-2}^{-1}) \circ \ldots \circ (u_2 \circ u_1^{-1}) \circ (u_1 \circ u_\alpha^{-1})$. Celui-ci est linéaire et est également défini sur tout $\mathbb{E}$. Cela explique l'appellation *linéairement reliées.* Mais cette remarque nous apporte davantage. Le changement de carte formel $(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})$ permet d'étendre la carte u_β sur $M_\beta \cup M_\alpha$. Pour cela, il suffit de définir, pour tout $p \in M_\alpha$, $u_\beta(p) := (u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))$. De cette manière, la carte locale $(u_\beta, M_\alpha \cup M_\beta)$ est correctement définie puisque, pour toute carte (u_γ, M_γ) telle que $M_\gamma \cap M_\alpha \neq \emptyset$, le changement de carte $u_\gamma \circ u_\beta^{-1} = (u_\gamma \circ u_\alpha^{-1}) \circ (u_\alpha \circ u_\beta^{-1})$ est différentiable. En conclusion, toute carte (u_α, M_α) peut être étendue linéairement sur l'union des domaines de chaque élément de $Lin\,(u_\alpha, M_\alpha)$. En d'autres termes, si nous définissons

$$\mathcal{M}_\alpha = \bigcup_{(u_\beta, M_\beta) \in Lin(u_\alpha, M_\alpha)} M_\beta,$$

nous pouvons étendre u_α (de même que toutes les fonctions de coordonnées des éléments de $Lin\,(u_\alpha, M_\alpha)$) sur $\mathcal{M}_\alpha$ tout entier. Cela signifie que les cartes reliées linéairement peuvent toutes être définies sur le même domaine.

Pour la suite du mémoire, nous ne considérerons plus que les cartes locales étendues sur l'union des domaines de toutes les cartes qui lui sont reliées linéairement. Par abus d'écriture, nous écrirons (u_α, M_α) au lieu de $(u_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)$. Il faudra toutefois garder à l'esprit que, désormais, toutes les cartes reliées linéairement sont définies sur le même domaine.

Tout ce que nous avons effectué concernant les cartes linéairement reliées est d'une grande utilité pour les cartes unitairement reliées. Il s'agit d'un cas particulier important que nous nous devons d'étudier également. En effet, les changements de représentation s'effectuent par transformations unitaires en mécanique quantique.

Définition 4.2.3 (Changement de carte unitaire). *Soient (u_α, M_α) et (u_β, M_β) deux cartes locales telles que $M_\alpha \cap M_\beta \neq \emptyset$. Le changement de carte sera dit* UNITAIRE *si l'application $u_\beta \circ u_\alpha^{-1}$ est unitaire sur son domaine.*

Considérons une carte (u_α, M_α) de notre variété. Nous définissons l'ensemble des cartes qui lui sont unitairement reliées.

Définition 4.2.4. *L'ensemble $Unit\,(u_\alpha, M_\alpha)$ est défini de la manière suivante :*

$$Unit\,(u_\alpha, M_\alpha) = \{(u_\beta, M_\beta) \in Lin\,(u_\alpha, M_\alpha) : u_\beta \circ u_\alpha^{-1} \text{ est unitaire}\}.$$

Si $(u_\beta, M_\beta) \in Unit\,(u_\alpha, M_\alpha)$, nous dirons que (u_β, M_β) est UNITAIREMENT RELIÉE *à (u_α, M_α).*

Nous rappelons que toutes les cartes linéairement reliées à une même carte sont toutes définies sur le même ouvert M_α, ce qui donne du sens à la définition. Il suffit donc de sélectionner, parmi les cartes linéairement reliées, celles dont le changement de carte pour y parvenir est unitaire. Nous avons, de manière évidente, que $Unit\,(u_\alpha, M_\alpha) \subset Lin\,(u_\alpha, M_\alpha)$.
La propriété suivante est similaire à la Propriété 4.2.2.

Propriété 4.2.3. *La relation entre cartes locales « être unitairement reliée à » est une relation d'équivalence. En conséquence, $Unit\,(u_\alpha, M_\alpha)$ est la classe d'équivalence de (u_α, M_α).*

Preuve
Cette relation est réflexive puisque $(u_\alpha, M_\alpha) \in Unit\,(u_\alpha, M_\alpha)$ de manière évidente. Elle est également symétrique puisque l'inverse d'un opérateur unitaire est également unitaire.
Pour montrer la transitivité, considérons trois cartes locales (u_α, M_α), (u_β, M_β) et (u_γ, M_γ) telles que $(u_\beta, M_\beta) \in Unit\,(u_\alpha, M_\alpha)$ et $(u_\gamma, M_\gamma) \in Unit\,(u_\beta, M_\beta)$. Nous avons, en particulier, que $(u_\beta, M_\beta) \in Lin\,(u_\alpha, M_\alpha)$ et $(u_\gamma, M_\gamma) \in Lin\,(u_\beta, M_\beta)$. Par la Propriété 4.2.2, cela implique

que $(u_\gamma, M_\gamma) \in Lin\,(u_\alpha, M_\alpha)$ par transitivité. Il nous reste à montrer que $u_\gamma \circ u_\alpha^{-1}$ est unitaire et nous aurons prouvé que $(u_\gamma, M_\gamma) \in Unit\,(u_\alpha, M_\alpha)$, c'est-à-dire que la relation est transitive. Or, $u_\gamma \circ u_\alpha^{-1} = (u_\gamma \circ u_\beta^{-1}) \circ (u_\beta \circ u_\alpha^{-1})$. Comme $u_\gamma \circ u_\beta^{-1}$ et $u_\beta \circ u_\alpha^{-1}$ sont unitaires, il en découle que leur composition est également unitaire.

La relation « être unitairement reliée à » est donc bien une relation d'équivalence sur l'ensemble des cartes locales. L'ensemble $Unit\,(u_\alpha, M_\alpha)$ est, par définition, la classe d'équivalence de (u_α, M_α).

□

Ceci clôture l'étude des cartes unitairement reliées. Elles serviront à la modification des postulats de la mécanique quantique dans la prochaine section.

4.3 Modification des postulats de la mécanique quantique

Utiliser un espace de Hilbert séparable revient à utiliser une variété hilbertienne triviale. Rappelons qu'en relativité restreinte, l'espace-temps est une variété pseudo-euclidienne triviale, l'espace euclidien à quatre dimensions muni de la métrique de Minkowski. Pour généraliser à la relativité générale, nous devons poser en postulat que l'espace-temps est une variété différentiable (lorentzienne) non nécessairement triviale à quatre dimensions. Dès lors, la généralisation de la mécanique quantique semble évidente : nous considérons l'ensemble des états quantiques d'un système comme étant les points d'une variété différentiable de dimension infinie [3].

Postulat 4.3.1. *Chaque état quantique d'un système est représenté par un point d'une variété hilbertienne M de dimension infinie. A chaque observable correspond un champ vectoriel particulier. Il existe une carte locale (u_α, M_α) dans laquelle toutes les observables de la mécanique quantique sont des champs vectoriels α-*HERMITIENS. *Une telle carte (u_α, M_α) est appelée* CARTE HERMITIENNE. *Dans toute carte hermitienne, si $u_\alpha(p)$ est l'écriture locale d'un état quantique représenté par le point $p \in M_\alpha$, alors, pour tout point $q \in M_\alpha$, q représente le même état que p si et seulement si il existe un scalaire k non nul tel que $u_\alpha(q) = k u_\alpha(p)$. Le point de la variété dont la représentation dans une carte linéaire est le vecteur nul ne représente aucun état quantique.*

Ce postulat nécessite quelques explications et développements.

Premièrement, nous avons choisi de représenter les observables par des champs vectoriels, ce qui peut paraître étonnant. En mécanique quantique, les observables sont des opérateurs hermitiens de l'espace des états dans lui-même. Intuitivement, il aurait dès lors été plus logique de poser les observables comme étant des applications de la variété dans elle-même. Ce choix découle en fait des propriétés de l'équation de Schrödinger et sera expliqué à la Section 4.5.

Deuxièmement, que signifie *α-hermitien* dans le cas de champs vectoriels ? La variété dont nous parlons n'a pas nécessairement de structure d'espace vectoriel. Le terme hermitien ne signifie donc pas que le champ, considéré comme application de la variété dans le fibré tangent, est hermitien puisque cela n'a pas de sens. Par contre, la représentation locale de la partie principale d'un champ vectoriel peut être hermitienne puisqu'il s'agit d'une application de l'espace de représentation dans lui-même. C'est pourquoi un champ vectoriel $X : M \to TM$ sera dit α-hermitien si la représentation locale dans la carte u_α de sa partie principale, càd $X_\alpha : U_\alpha = u_\alpha(M_\alpha) \subset \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, est un opérateur linéaire hermitien. Notons que le terme opérateur n'est pas tout à fait correct car U_α n'est pas nécessairement un espace vectoriel. Mais c'est bien le caractère hermitien qui nous intéresse, donc nous ne nous formalisons pas de ce raccourci. Similairement, nous dirons qu'un champ vectoriel $X : M \to TM$ est α-linéaire si la représentation locale de sa partie principale dans la carte u_α est un opérateur linéaire.

3. Comme $l^2(\mathbb{C})$ est difféomorphe à $l^2(\mathbb{R})$, par la Proposition 2.1.4, nous ne nous soucierons pas du problème complexe-réel qui pourrait survenir. Toute variété complexe de dimension infinie est également une variété réelle de dimension infinie (et vice-versa) par ce difféomorphisme.

Le troisième point sur lequel nous insistons concerne les cartes hermitiennes. Nous avons affirmé dans le Postulat 4.3.1 qu'une carte hermitienne u_α était caractérisée par le fait que toutes les observables de la mécanique quantique y étaient représentées par des champs vectoriels α-hermitiens. Que se passe-t-il lorsque nous considérons plus d'une carte hermitienne ? La proposition suivante répond à cette question.

Proposition 4.3.1. *Soient (u_α, M_α) et (u_β, M_β) deux cartes locales de la variété M unitairement reliées. Alors, u_α est une carte hermitienne si et seulement si u_β est une carte hermitienne.*

Preuve
Nous devons d'abord prouver que tout opérateur α-hermitien est β-linéaire.
Comme $u_\beta \circ u_\alpha^{-1}$ est linéaire, nous avons que $D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(v) = u_\beta \circ u_\alpha^{-1}$, pour tout v, par la Proposition 2.1.2. D'où nous déduisons que

$$A_\beta(u) = \left(\left[u_\beta \circ u_\alpha^{-1}\right] \circ A_\alpha \circ \left[u_\alpha \circ u_\beta^{-1}\right] \right)(u).$$

Nous voyons tout de suite, car $u_\alpha \circ u_\beta^{-1}$ est également linéaire bornée, que A_β est linéaire si et seulement si A_α est linéaire.

Le caractère hermitien découle également de cette équation :

$$\begin{aligned} A_\beta^* &= \left[u_\alpha \circ u_\beta^{-1}\right]^* \circ A_\alpha^* \circ \left[u_\beta \circ u_\alpha^{-1}\right]^* \\ &= \left[u_\beta \circ u_\alpha^{-1}\right] \circ A_\alpha \circ \left[u_\alpha \circ u_\beta^{-1}\right] \\ &= A_\beta, \end{aligned}$$

où $*$ représente l'adjoint et où nous avons utilisé l'hermiticité de A_β et l'unitarité des changements de carte. En conclusion, A_β est auto-adjoint, donc hermitien.

□

Plus généralement, nous venons également de montrer que, si deux cartes sont linéairement reliées, alors l'une est linéaire si et seulement si l'autre l'est aussi. Nous précisons toutefois qu'il est possible d'avoir deux cartes linéaires non linéairement reliées. Nous donnons un exemple en dimension 1. Le changement de carte du type $(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u) = ku^r$, où k et r sont des constantes, permet d'assurer que, si A est un champ vectoriel α-linéaire, alors il est aussi β-linéaire.

En effet, supposons que $A_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la représentation locale dans la carte u_α de la partie principale du champ vectoriel A, soit linéaire. Comme nous sommes en dimension 1, linéaire signifie que $A_\alpha(u) = C_\alpha u$, $\forall\ u \in U_\alpha$, où C_α est une constante réelle. Nous recherchons les changements de carte $u_\beta \circ u_\alpha^{-1}$ tels que A_β soit linéaire, c'est-à-dire $A_\beta(v) = C_\beta v$, $\forall\ v \in U_\beta$, où C_β est une constante réelle. Cela se traduit par

$$\begin{aligned} A_\beta(v) &= \left[D\left(u_\beta \circ u_\alpha^{-1}\right)\left((u_\alpha \circ u_\beta^{-1})(v)\right)\right]\left[A_\alpha\left((u_\alpha \circ u_\beta^{-1})(v)\right)\right] \\ &= \left.\frac{d(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(t)}{dt}\right|_{t=(u_\alpha \circ u_\beta^{-1})(v)} C_\alpha(u_\alpha \circ u_\beta^{-1})(v) \\ &= C_\beta v. \end{aligned}$$

Si nous posons $f := u_\beta \circ u_\alpha^{-1}$ et utilisons la notation $f'(u) = \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=u}$, nous arrivons à l'égalité

$$f'\left(f^{-1}(v)\right) f^{-1}(v) = \frac{C_\beta}{C_\alpha} v.$$

Or, $f'(u) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(u))}$. Nous en déduisons que $f'\left(f^{-1}(v)\right) = \frac{1}{(f^{-1})'(v)}$. Notre équation différentielle devient donc

$$\frac{f^{-1}(v)}{\left(f^{-1}\right)'(v)} = \frac{C_\beta}{C_\alpha} v.$$

La solution de cette équation se trouve aisément par séparation des variables et donne

$$f^{-1}(v) = m v^{\frac{C_\alpha}{C_\beta}},$$

où $m \in \mathbb{R}$ est une constante d'intégration, c'est-à-dire

$$f(v) = k v^r$$

où k est une constante d'intégration et $r = \frac{C_\beta}{C_\alpha}$. Nous constatons que $C_\beta = rC_\alpha$. Autrement dit, un tel changement de carte va toujours envoyer la constante C_α de tout A_α sur la constante rC_α et ce, peu importe l'opérateur. Nous constatons, par ailleurs, qu'un changement de carte linéaire $(r = 1)$, ne modifie pas cette constante, donc l'opérateur est conservé.

Le cas en dimension infinie est extrêmement complexe et nous ne l'avons pas traité. Nous précisons juste qu'un changement de carte $f = u_\beta \circ u_\alpha^{-1}$ qui préserve la linéarité des champs vectoriels doit vérifier l'équation différentielle

$$f^{-1}(u) = \left[A_\alpha^{-1} \circ D\left(f^{-1}\right)(u) \circ A_\beta\right](u), \tag{4.3.1}$$

pour tout champ vectoriel A. Il est possible que, en dimension infinie, ses seules solutions soient les opérateurs linéaires continus mais l'exemple en dimension 1 tend à penser le contraire. Ces opérateurs sont solutions particulières de cette équation mais probablement pas globales.

Concernant l'hermiticité, nous ne savons pas si deux cartes hermitiennes sont toujours unitairement reliées ou non. L'exemple en dimension 1 que nous venons de donner n'est pas très représentatif dans ce cas puisque tous les opérateurs linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont hermitiens.

Nous sommes devant trois possibilités. Soit nous imposons que toutes les cartes hermitiennes sont unitairement reliées. Dans ce cas, aucun problème ne survient dans la théorie [4], les postulats de la mécanique quantique sont facilement transposables aux cartes hermitiennes. Par exemple, les valeurs propres sont identiques dans toute carte hermitienne grâce à la linéarité des changements de carte. La valeur des observables est donc un invariant si nous considérons uniquement ces cartes. Notons que nous n'avons pas besoin du caractère unitaire pour conserver les mêmes valeurs propres, le caractère linéaire suffit. Mais si nous voulons des observables hermitiennes, nous sommes obligés d'ajouter le caractère unitaire.

La deuxième possibilité consiste à autoriser l'existence de cartes hermitiennes non unitairement reliées. Cela va poser d'énormes problèmes de fond si les cartes ne sont même pas linéairement reliées. En effet, les valeurs propres d'un champ vectoriel ne seront pas les mêmes dans toute carte hermitienne. Cela signifierait, entre autres, que les valeurs de ces observables, telles que la position ou la vitesse d'une particule, sont des valeurs qui changent selon la représentation utilisée. Du point de vue de la mécanique quantique actuelle, il s'agit d'une aberration. Un autre problème fait son apparition au niveau du Postulat 4.3.1. En effet, des vecteurs multiples l'un de l'autre dans une carte unitaire ne le sont plus forcément dans une autre si le changement de carte entre les deux n'est pas linéaire. Plus particulièrement, le vecteur nul n'est pas conservé dans toutes les cartes unitaires, ce qui est interdit car cela signifierait qu'il existe des cartes dans lesquelles ce vecteur représenterait un état, ce qui est en contradiction avec le Postulat 4.3.1.

Devant ces problèmes potentiels concernant les cartes hermitiennes, il existe un troisième choix possible : désigner une carte de référence comme étant hermitienne et stipuler que les cartes dites hermitiennes sont strictement les cartes unitairement reliées à cette même carte. Cela permet de supprimer les problèmes cités précédemment, mais alors un autre problème

4. Nous en discutons dans la Section 4.4.

survient. Pourquoi mettre en avant une carte plutôt qu'une autre ? En relativité générale, cela serait inconcevable puisqu'aucun observateur n'occupe de place privilégiée dans l'espace-temps. Nous nous voyons néanmoins forcés d'adopter ce choix bien qu'imparfait. Une forme plus faible consisterait à considérer toutes les cartes linéairement reliées à la même carte de base. Cela permettrait de toujours conserver les valeurs propres des observables et les vecteurs multiples l'un de l'autre, mais nous perdrions le caractère hermitien.

Maintenant que nous avons pris conscience de ces problèmes potentiels, nous posons le postulat suivant, généralisation directe des deuxième et troisième postulats de la mécanique quantique.

Postulat 4.3.2. *Les résultats de mesures associées à une observable sont les valeurs propres de la représentation, dans une carte hermitienne, de la partie principale de l'opérateur associé.*

Plus précisément, si nous notons $\{\lambda_n^\alpha\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *les valeurs propres de* A_α*, la représentation de l'observable* $A : M \to TM$ *dans la carte hermitienne* (u_α, M_α)*, et* $\{v_n^\alpha\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *les vecteurs propres qui y sont associés, alors la mesure de* A *pour l'état* $p \in M_\alpha$ *donnera* λ_n^α *comme résultat avec une probabilité*

$$P_\alpha(\lambda_n^\alpha, p) = \frac{|\langle v_n^\alpha, u_\alpha(p)\rangle|^2}{\langle u_\alpha(p), u_\alpha(p)\rangle}. \tag{4.3.2}$$

Dans ce cas, l'état du système est projeté sur le vecteur propre v_n^α*, ce qui se traduit par le fait que le nouvel état* $q \in M_\alpha$ *est donné par* $q = u_\alpha^{-1}(v_n^\alpha)$*.*

Un tel postulat implique une restriction sur les changements de carte autorisés par cette théorie. Nous désirons en effet avoir les mêmes valeurs propres dans toutes les cartes et la même probabilité d'obtenir le résultat λ_n dans toutes les cartes, pour tout n. La section suivante se penche sur ce problème.

4.4 Propriétés des cartes linéairement et unitairement reliées

Différentes propriétés très intéressantes des cartes linéairement reliées à une carte linéaire peuvent être dérivées. Considérons (u_α, M_α) une carte linéaire.

Propriété 4.4.1. *Soit* $(u_\beta, M_\beta) \in Lin\,(u_\alpha, M_\alpha)$*.*
Pour tout état $p \in M_\beta = M_\alpha$*, s'il existe* $q \in M_\beta = M_\alpha$ *et* λ *un scalaire non nul tels que* $u_\alpha(q) = \lambda u_\alpha(p)$*, alors* $u_\beta(q) = \lambda u_\beta(p)$*. Autrement dit, le fait que* p *et* q *représentent le même état ne dépend que de la carte linéaire de référence considérée.*

Preuve
La linéarité du changement de carte permet d'écrire

$$\begin{aligned} u_\beta(q) &= (u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(q)) \\ &= (u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(\lambda u_\alpha(p)) \\ &= \lambda(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p)) \\ &= \lambda u_\beta(p). \end{aligned}$$

□

La deuxième propriété que nous présentons concerne les valeurs propres des observables.

Propriété 4.4.2. *Soit* $(u_\beta, M_\beta) \in Lin\,(u_\alpha, M_\alpha)$ *et considérons une observable* $A : M \to TM$*.*
Si λ *est une valeur propre de* A_α*, alors* λ *est également une valeur propre de* A_β*. Les vecteurs propres* v_α *et* v_β *de ces opérateurs respectifs vérifient la relation* $v_\beta = (u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(v_\alpha)$*.*
Autrement dit, les valeurs des observables sont conservées par les changements de carte linéaires.

Preuve
Soient λ une valeur propre de A_α et v_α un vecteur propre associé à λ. Nous devons montrer l'égalité

$$A_\beta((u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(v_\alpha)) = \lambda(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(v_\alpha).$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} A_\beta((u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(v_\alpha)) &= \left[D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(v_\alpha)\right][A_\alpha(v_\alpha)] \\ &= \left[D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(v_\alpha)\right][\lambda v_\alpha] \\ &= \lambda(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(v_\alpha), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la linéarité du changement de carte et la Proposition 2.1.2.

□

La dernière propriété que nous donnons concerne les cartes unitairement reliées. Considérons une carte hermitienne (u_α, M_α).

Propriété 4.4.3. *Soit $(u_\beta, M_\beta) \in Unit\,(u_\alpha, M_\alpha)$ et soit $A : M \to TM$ une observable. Alors, si λ_n est une valeur propre de A_α (et donc de A_β, par la Propriété 4.4.2), alors $P_\alpha(\lambda_n, p) = P_\beta(\lambda_n, p)$ pour tout $p \in M_\alpha = M_\beta$.*

Preuve
La première chose que nous devons montrer est que si $\{v_n^\alpha\}$ est une base orthonormale de vecteurs propres associée aux valeurs propres $\{\lambda_n\}$, écrite dans la carte (u_α, M_α), alors les vecteurs $v_n^\beta := (u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(v_n^\alpha)$ forment également une base orthonormée de vecteurs propres.

Le fait que $u_\beta \circ u_\alpha^{-1}$ soit continue et bijective sur $\mathbb{E}$, l'espace de Hilbert de représentation, implique que chaque vecteur $x \in \mathbb{E}$ possède une représentation unique

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n^\beta,$$

où $(a_n) \subset \mathbb{C}$. Le caractère orthonormal se déduit du fait que, par son unitarité, le changement de carte vérifie

$$\begin{aligned} \left\langle v_n^\beta, v_m^\beta \right\rangle &= \left\langle (u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(v_n^\alpha), (u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(v_m^\alpha) \right\rangle \\ &= \langle v_n^\alpha, v_m^\alpha \rangle \\ &= \delta_{n,m}. \end{aligned}$$

Grâce à cela, nous pouvons en déduire que

$$P_\beta(\lambda_n) = \frac{\left| \left\langle v_n^\beta, u_\beta(p) \right\rangle \right|^2}{\langle u_\beta(p), u_\beta(p) \rangle}.$$

Or, l'unitarité du changement de carte implique que

$$\begin{aligned} \left\langle v_n^\beta, u_\beta(p) \right\rangle &= \langle v_n^\alpha, u_\alpha(p) \rangle \\ \langle u_\beta(p), u_\beta(p) \rangle &= \langle u_\alpha(p), u\alpha(p) \rangle . \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} P_\beta(\lambda_n, p) &= \frac{|\langle v_n^\alpha, u_\alpha(p) \rangle|^2}{\langle u_\alpha(p), u_\alpha(p) \rangle} \\ &= P_\alpha(\lambda, p). \end{aligned}$$

□

Notons que nous avons dû utiliser l'unitarité pour préserver la probabilité en question. Cela montre que si nous nous autorisons les changements de carte linéaires mais non unitaires, nous risquons de perdre la probabilité de mesure des valeurs des observables.

4.5 Equation de Schrödinger générale

Dans cette section, nous donnons les raisons principales qui nous ont conduits à considérer les observables comme étant des champs vectoriels et non des difféomorphismes de la variété dans elle-même. La principale raison de ce choix réside dans la forme de l'équation de Schrödinger. Il s'agit d'une équation du premier ordre régissant l'évolution temporelle de l'état. Ramenée sur une variété, il s'agirait d'une courbe, paramétrisée par le temps, dont l'équation serait du premier ordre. Or, en géométrie différentielle, il existe des courbes dont l'équation est une équation différentielle du premier ordre. Il s'agit des flots (voir la Section 3.8). Un flot est toujours relié à un champ vectoriel, d'où notre choix pour les observables.

Cette définition des observables est-elle compatible avec la mécanique quantique actuelle ? Autrement dit, si nous considérons une variété triviale, retrouvons-nous la mécanique quantique telle que nous la connaissons ? La réponse à cette question est affirmative parce que la mécanique quantique ne considère que des cartes hermitiennes globales reliées unitairement. Nous expliquons cette réponse en détail.

En mécanique quantique, nous devons toujours choisir une base hilbertienne dans laquelle représenter les états. Cela correspond à choisir une carte globale hermitienne de notre variété triviale (u_α, M_α). Les changements de représentation se font par transformations unitaires, cela signifie que les changements de carte sont unitaires. Jusque-là, notre théorie géométrique s'adapte parfaitement. Le problème, apparent, survient quand nous abordons le cas des observables. Il s'agit d'opérateurs hermitiens en mécanique quantique alors que nous les avons définies comme étant des champs vectoriels de la variété. Comment faire, dès lors, le lien entre les deux ?

Considérons la représentation de la partie principale d'un champ vectoriel α-hermitien A_α. Il s'agit d'un opérateur hermitien de l'espace de Hilbert dans lui-même. Il peut donc être également vu comme la représentation d'un difféomorphisme de la variété dans elle-même. Pour qu'il s'agisse d'une observable de la mécanique quantique au sens classique du terme, il faut qu'il se comporte exactement comme un difféomorphisme de la variété dans elle-même sous changement de représentation, c'est-à-dire que

$$A_\beta = (u_\beta \circ u_\alpha^{-1}) \circ A_\alpha \circ (u_\alpha \circ u_\beta^{-1}).$$

Or, en mécanique quantique, nous ne considérons que des changements de cartes unitaires, donc linéaires. Il s'ensuit naturellement que

$$\begin{aligned} A_\beta(u) &= \left[D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})((u_\alpha \circ u_\beta^{-1})(u))\right] \left[A_\alpha((u_\alpha \circ u_\beta^{-1})(u))\right] \\ &= \left[(u_\beta \circ u_\alpha^{-1}) \circ A_\alpha(\circ u_\alpha \circ u_\beta^{-1})\right](u), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la Proposition 2.1.2.

Cela montre qu'il n'y a pas de contradiction à considérer les observables comme étant des champs vectoriels plutôt que des difféomorphismes. Toutefois, les observables ne sont pas toujours des opérateurs bornés en mécanique quantique, il est donc trop restrictif de ne considérer que les champs vectoriels car ceux-ci sont toujours nécessairement continus (donc bornés). Il serait plus correct de parler d'objets ressemblant aux champs vectoriels mais, par souci de simplicité, nous ne considérerons ici que des champs vectoriels.

Abordons maintenant l'équation de Schrödinger. Si nous prenons l'observable H représentant l'Hamiltonien du système comme étant un champ vectoriel, nous pouvons écrire l'équation de son flot :

$$\dot{\sigma}_H(t,p) = H\left(\sigma_H(t,p)\right). \tag{4.5.1}$$

Nous reconnaissons immédiatement l'équation de Schrödinger (au facteur $i\hbar$ près, mais ce n'est pas un problème puisque ce facteur peut-être englobé dans le champ H). Il est important toutefois de noter que cette équation est totalement indépendante de la représentation considérée. Ce n'est pas le cas si nous définissons les observables comme étant des difféomorphismes. En effet, si nous avons

$$\begin{aligned} H_\beta &= (u_\beta \circ u_\alpha^{-1}) \circ H_\alpha \circ (u_\alpha \circ u_\beta^{-1}); \\ \dot{\sigma}_\alpha(t,p) &= H_\alpha(\sigma_\alpha(t,p)), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} H_\beta\left(\sigma_\beta(t,p)\right) &= (u_\beta \circ u_\alpha^{-1})\left(H_\alpha(\sigma_\alpha(t,p))\right) \\ &= (u_\beta \circ u_\alpha^{-1})\left(\dot{\sigma}_\alpha(t,p)\right). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_\beta(t,p) &= \frac{d}{dt}\left[(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(\sigma_\alpha(t,p))\right] \\ &= \left[D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(\sigma_\alpha(t,p))\right]\left[\dot{\sigma}_\alpha(t,p)\right]. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, si le changement de carte est non linéaire, alors

$$H_\beta(\sigma_\beta(t,p)) \neq \dot{\sigma}_\beta(t,p).$$

Comme il est plus pratique, et plus élégant, que l'équation de Schrödinger ne dépende pas de la représentation dans laquelle elle est écrite, il est légitime de considérer les observables comme des champs vectoriels et non comme des difféomorphismes.

Le fait d'avoir une équation d'évolution totalement indépendante du choix de coordonnées est intéressant. Dans le cas de cartes non linéaires, la courbe existe tout de même. Une part d'information reste conservée même si nous perdons la linéarité (et donc l'hermiticité) des observables.

4.6 Limitations, questionnement et perspectives

Nous avons tenté de généraliser la mécanique quantique grâce aux variétés hilbertiennes et, dans cette section, nous faisons le point sur cette théorie. Plusieurs problèmes ont été mis en lumière et nous les regroupons tout en envisageant leurs possibles solutions. Cette théorie amène également un certain nombre de questions d'interprétation d'objets qui n'existent pas dans la théorie actuelle. Enfin, nous donnons d'autres idées de géométrisation de la mécanique quantique sur lesquelles nous n'avons pas eu le temps de nous pencher mais qui pourraient se révéler intéressantes.

4.6.1 Problème des cartes non hermitiennes

Le problème majeur de la théorie que nous avons développée consiste en l'existence possible de cartes non hermitiennes. Nous avons vu que, dans de telles cartes, les observables ne sont pas des opérateurs linéaires hermitiens. Si nous considérons que toutes les cartes sont globales, hermitiennes et unitairement reliées, il n'y a aucun problème. Tout fonctionne bien puisque nous sommes en présence d'une variété triviale. Il s'agit du cadre de la mécanique quantique actuelle. Par contre, s'il existe une carte non unitairement reliée à la carte hermitienne de référence, celle-ci va poser problème. Si elle est également hermitienne, mais non unitairement reliée à la carte hermitienne de référence, ses valeurs propres ne seront plus les mêmes que celles de référence. Cela a-t-il du sens physiquement ? Il ne s'agit pas d'une question évidente. Si cette carte n'est pas hermitienne, c'est encore plus inconcevable. Nous sortons complètement du cadre de la mécanique quantique actuelle. Si, dans cette carte, les observables sont tout de même linéaires, il est possible, en cas de changement de carte non linéaire par rapport à la carte de référence, d'obtenir des valeurs propres complexes. Cela devient totalement non physique. Il est également possible d'avoir des cartes non linéaires, c'est-à-dire dans lesquelles les observables ne sont même plus linéaires. Dans ce cas, il est impossible de définir des valeurs propres pour un tel opérateur. Nous sommes donc devant de réels problèmes qui semblent compromettre cette théorie.

Néanmoins, il existe peut-être une solution pour s'en sortir. Considérons (u_α, M_α) une carte unitairement reliée à la carte hermitienne de référence et (u_β, M_β) une autre carte quelconque telle que $M_\alpha \cup M_\beta \neq \emptyset$. Si (u_β, M_β) est unitairement reliée à (u_α, M_α), il n'y a pas de problème, comme nous l'avons déjà mentionné plus haut. Si le lien entre les deux cartes est linéaire mais non unitaire, cela implique que la carte (u_β, M_β) n'est plus obligatoirement hermitienne. Mais nous savons assurément que les observables dans cette carte sont linéaires et que, en vertu de la Propriété 4.4.2, leurs valeurs propres et vecteurs propres sont les mêmes que dans la carte hermitienne de référence. Donc, nous conserverions les valeurs des observables. Le problème réside dans le fait que les amplitudes de probabilité définies au Postulat 4.3.2 ne seraient plus nécessairement conservées par changement de carte. Cela aurait-il un sens physique ? Il n'est pas évident que ce soit le cas. Si, par contre, $u_\beta \circ u_\alpha^{-1}$ n'est pas linéaire sur son domaine, plus rien ne fonctionne comme nous l'avons déjà dit. La solution à ce problème pourrait provenir de la linéarisation du changement de carte. Pour plus de clarté, nous donnons la définition suivante.

Définition 4.6.1. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Banach et $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ une application différentiable en un point $u \in \mathbb{E}$.*
La LINÉARISATION *de f au point u est l'application linéaire bornée $Df(u) \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.*

Pour tout état $p \in M_\alpha \cup M_\beta$, nous pouvons donc définir la linéarisation du changement de carte au point p, soit l'application $D(u_\beta \circ u_\alpha^{-1})(u_\alpha(p))$. Si nous considérons cette linéarisation à la place du changement de carte, nous introduisons un changement de carte linéaire, ce qui permet d'au moins conserver la linéarité et les valeurs des observables. Toutefois, il est à noter que cette méthode n'est pas parfaite pour deux raisons. La première est qu'une linéarisation n'est qu'une approximation valable dans un certain voisinage du point u considéré. La linéarisation du changement de carte ne va donc donner qu'une approximation des observables dans la carte (u_β, M_β). La seconde est qu'une linéarisation n'est pas forcément unitaire. Le caractère hermitien ne sera donc pas nécessairement conservé et nous aurons des problèmes au niveau des amplitudes de probabilité. Nous signalons que, si nous décidons de linéariser les observables dans la nouvelle carte plutôt que le changement de carte, nous obtenons un résultat moins intéressant. En effet, dans ce cas, les observables résultantes n'ont pas forcément les mêmes valeurs propres, celles-ci pouvant même être complexes.

Ce développement nous a permis de dégager deux éléments importants. Premièrement, la mécanique quantique telle que nous la connaissons correspond au cas d'une variété triviale dont toutes les cartes sont globales, hermitiennes et unitairement reliées. Il est aisé de constater que chaque carte locale correspond à une représentation relative à une observable et que les changements de carte ne sont que des changements de base unitaires. Deuxièmement, si nous considérons une variété non triviale, nous introduisons forcément de la non linéarité dans les changements de carte. Cela amène différents problèmes pouvant être résolus en partie par linéarisation. Mais quelle interprétation physique devrions-nous donner à des changements de représentation non linéaires ? La question reste ouverte mais il est tout à fait possible que ce ne soit pas physiquement acceptable et que seule une variété triviale modélise correctement la mécanique quantique.

4.6.2 Considération des observables en tant que champs vectoriels

Dans ce point, nous mettons en avant deux problèmes concernant la représentation des observables par des champs vectoriels. A la Section 4.3, après avoir introduit le nouveau postulat, nous avions stipulé que les champs vectoriels ne sont pas des opérateurs linéaires à proprement parler puisque les ouverts $U_\alpha = u_\alpha(M_\alpha)$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ (à moins d'avoir $U_\alpha = \mathbb{E}$ comme dans le cas d'une variété triviale). Dans le même ordre d'idée, à la Section 4.5, nous avions précisé que les opérateurs des observables en mécanique quantique ne sont pas nécessairement bornés. Or, les champs vectoriels sont toujours différentiables par définition. Il est donc impossible de représenter une observable non bornée par un champ vectoriel.

Comment surmonter ces deux problèmes ? Concernant le second, nous pouvons utiliser des objets ressemblant à des champs mais sans être continus. Le premier problème est plus ennuyeux. Si nous imposons que U_α est un sous-espace vectoriel plutôt qu'un ouvert de $\mathbb{E}$ [5], nous allons avoir des difficultés au niveau du prolongement des changements de carte que nous effectuons à la Remarque 4.2.1. Un tel prolongement ne serait plus forcément unique [6]. Par conséquent, la notion de cartes linéairement ou unitairement reliées sera beaucoup plus délicate à mettre en place. Ce n'est pas forcément impossible mais il faudra développer une nouvelle notion pour formaliser cette idée de lien linéaire ou unitaire. Nous n'avons pas eu le temps de nous avancer plus loin dans cette direction. Ces problèmes tendent tout de même à penser que ce formalisme ne fonctionne que dans le cas d'une variété triviale. Cela signifierait que la mécanique quantique n'est pas généralisable de cette manière, du moins pas sans abandonner une bonne partie de ses postulats.

4.6.3 Questions diverses

Outre les deux problèmes exposés dans les deux sous-sections précédentes, le formalisme que nous avons introduit pose d'autres questions profondes. Nous avons constaté à la Section 4.5 que, même en présence d'une carte non hermitienne, l'évolution du vecteur d'état était tout à fait définie. Nous arrivons alors à une question importante. Est-ce que les cartes non hermitiennes, voire même non linéaires, auraient un sens physique ? La linéarité est une composante centrale de la mécanique quantique. Cela est-il sensé de définir des observables non linéaires ? Nous nous retrouvons dans une situation comparable à celle des référentiels galiléens. Seules les transformations de Galilée conservent les lois de la mécanique newtonienne. Dans notre cas, seuls les changements de carte unitaires conservent le caractère hermitien, les valeurs propres et les vecteurs propres des observables. Comment surmonter ce problème ? La question reste ouverte.

Une seconde question concerne la métrique. Nous pouvons doter notre variété d'un tenseur de métrique. Mais à quoi correspondrait un tel objet ? Cela nous permettrait de définir une courbure, une dérivée covariante et, par conséquent, un transport parallèle. Mais encore une fois, l'interprétation physique de tels objets n'est pas évidente. A quoi correspondraient les géodésiques ? Les géodésiques sont des courbes particulières de la variété. Il pourrait sembler logique, dès lors, de considérer de telles courbes comme l'évolution temporelle d'un vecteur état. Malheureusement, nous disposons déjà d'une équation d'évolution : l'équation du flot du champ vectoriel associé à l'observable Hamiltonien. Cette équation est du premier ordre alors que l'équation des géodésiques est du second ordre. Une possibilité consisterait à égaler ces deux équations pour obtenir une équation différentielle faisant intervenir la métrique. Soulignons tout de même que nous aurions une équation impliquant, d'une part, l'hamiltonien du système, càd l'énergie, et d'autre part la métrique de la variété. Cette équation ressemblerait, dans ses composantes, aux équations d'Einstein puisque ces dernières donnent une égalité entre une fonction de la métrique et une fonction de l'énergie. Nous pourrions aborder le problème de la métrique sous un autre angle. Nous avons vu à la Section 3.12 qu'à toute métrique riemannienne correspond un opérateur hermitien défini positif relatif à la carte locale considérée. Est-il dès lors envisageable de conjecturer l'existence d'une métrique pseudo-riemannienne pour toute observable ? Dans ce cas,

5. Un sous-espace vectoriel strict d'un espace vectoriel normé n'est jamais un ouvert car il ne contient aucune boule ouverte de cet espace.

6. En effet, si nous notons $\{e_i\}_{i\in I}$ une base de U_α et $\{f_j\}_{j\in J}$ un ensemble de vecteurs linéairement indépendants tels que la réunion des e_i et des f_j forme une base de $\mathbb{E}$, alors nous pouvons choisir n'importe quelle valeur pour définir le changement de carte en chaque f_j pour ensuite prolonger linéairement sur $\mathbb{E}$ tout entier. Il y a donc plusieurs prolongements linéaires possibles.

nous n'aurions plus le problème de la linéarité puisque le travail s'effectuerait au niveau des espaces tangents. Cependant, même si ces idées sont intéressantes, il y a de nombreux problèmes à régler avant de penser à introduire une métrique sur cette variété.

Une troisième interrogation se pose au niveau du Postulat 4.3.1. Nous avons établi qu'à toute observable correspondait un champ vectoriel. Or, nous avons vu à la Section 3.7 qu'un champ vectoriel pouvait être vu comme une dérivation sur l'ensemble des champs scalaires de la variété. Comment pourrions-nous interpréter physiquement les champs scalaires de la variété, et plus particulièrement l'action des observables sur ces champs ? Une étude de ces concepts dans le cas d'une variété triviale, et donc de la mécanique quantique actuelle, serait intéressante à réaliser d'un point de vue géométrique. En effet, considérer les observables comme des dérivations sur les champs scalaires de l'espace des états est une idée qui n'a, à notre connaissance, jamais été proposée.

Conclusion

Nous avons étudié les variétés hilbertiennes en profondeur et nous avons proposé un cadre géométrique à la mécanique quantique. Ce mémoire exploratoire et théorique a parfaitement rempli ses objectifs en réalisant une étude complète et détaillée du problème initial.

Dans le Chapitre 2, nous avons introduit la notion de différentiabilité des applications entre espaces de Banach. Nous avons immédiatement particularisé cette définition au cas de $l^2(\mathbb{R})$. De plus, nous avons donné de nombreux résultats utiles concernant la différentiabilité de certaines applications particulières comme les applications linéaires bornées ou les composées d'applications. En définitive, les résultats présentés sont très similaires à ceux existant dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. La seconde partie de ce chapitre est dédiée aux espaces tangent et cotangent des espaces de Hilbert ainsi qu'aux tenseurs.

Le Chapitre 3 a consisté en une présentation générale des concepts principaux de la géométrie différentielle en dimension infinie. Il est intéressant de remarquer que, dans toutes les définitions et constructions que nous avons présentées (hors exemples et particularisations), nous avons toujours parlé de variété modelée sur un espace de Hilbert séparable. A aucun moment nous n'avons précisé la dimension de cet espace. La dimension que nous sous-entendions était bien sûr la dimension infinie mais la dimension finie s'inscrit également dans ce que nous avons présenté. Il peut être aisément montré que nous retrouverions tous les résultats du Chapitre 1 si nous prenions $\mathbb{R}^n$ comme espace de Hilbert. Les constructions de ces deux chapitres sont différentes mais sont globalement équivalentes. Cette différence provient du fait que certains résultats en dimension finie ne sont plus valables en dimension infinie. Par exemple, en dimension finie, les champs vectoriels sont les dérivations des champs scalaires. Mais en dimension infinie, toutes les dérivations des champs scalaires ne sont pas forcément des champs vectoriels. C'est pourquoi la construction de l'espace tangent et des champs vectoriels est différente dans le cas de la dimension infinie. Mais elle donne un résultat équivalent en dimension finie.

Le deuxième enjeu de ce chapitre était de produire une particularisation dans des variétés modelées sur $l^2(\mathbb{R})$ et de développer l'équivalent du calcul tensoriel en dimension infinie. Cette partie se révèle être un succès puisque toutes les particularisations ont mené à des résultats qui confirment notre intuition. Au final, les sommations finies d'indices en dimension finie se transforment en séries selon nos attentes. Les problèmes de convergence sont surmontés grâce à la définition de différentiabilité. Cette notion est en fait très forte et permet de généraliser sans problème les formules tensorielles habituelles. Les variétés hilbertiennes telles que nous les avons définies sont donc un cas particulier des variétés générales. Nous aurions pu choisir une définition plus faible en choisissant une différentiabilité moins forte. Mais, dans ce cas, nous aurions peut-être rencontré des difficultés pour établir certaines formules. Il ne faut en effet pas oublier que toutes les formules de la Section 2.1.1 sont vraies pour la différentiabilité que nous avons définie, mais rien ne nous dit que ce soit toujours le cas si nous envisageons une forme plus faible.

Nous avons développé les formules tensorielles en dimension infinie pour le cas de $l^2(\mathbb{R})$, mais nous percevons leurs limites. Il est très compliqué d'utiliser de telles formules car cela implique le calcul de nombreuses séries. L'utilité pratique de ces développements reste donc très limitée puisque nous ne pouvons calculer une infinité de composantes pour un tenseur ou un nombre conséquent de séries. Une perspective de ce mémoire serait de voir dans quelle mesure nous pourrions utiliser ce calcul tensoriel en dimension infinie. La sphère S^∞ serait, dans ce cadre, un bon objet d'étude.

Le Chapitre 4 avait pour but d'introduire les variétés hilbertiennes dans la mécanique quantique à des fins de généralisation, d'élégance et, pourquoi pas, afin de rapprocher mécanique quantique et relativité générale. L'approche que nous avons adoptée (considérer l'ensemble des états quantiques comme une variété plutôt qu'un espace de Hilbert) n'a globalement pas fonctionné dans le sens où la variété hilbertienne considérée doit être triviale si nous désirons éviter tout problème difficilement surmontable. Les raisons de cette limitation se retrouvent dans la rigidité des postulats de la mécanique quantique. La linéarité, et plus particulièrement l'hermiticité des observables, est un point central de cette théorie. Sans elle, il n'est plus possible de définir de valeur pour les observables puisque la linéarité est une condition indispensable à la définition de valeurs propres. Or, la non linéarité est au cœur de la géométrie différentielle comme nous l'avons déjà précisé. Associer mécanique quantique et géométrie différentielle est donc une idée intéressante mais conduit nécessairement à des difficultés. Toutefois, nous avons montré qu'il était possible de conserver la linéarité des observables en linéarisant les changements de carte. Cette solution a l'avantage de conserver les valeurs propres des observables. Mais elle ne permet de conserver ni le caractère hermitien, ni les amplitudes de probabilité.

Y a-t-il un avantage à considérer une variété hilbertienne plutôt que les axiomes actuels de la mécanique quantique alors que de tels problèmes se posent ? Tout dépend si nous considérons les postulats de la mécanique quantique actuelle comme totalement rigides ou non. Si oui, alors notre variété est triviale et seuls les changements de carte unitaires sont autorisés. Dans le cas contraire, il devient possible d'envisager d'autres types de changements de carte et d'étudier ce qu'une variété non triviale apporterait comme intérêt physique à la théorie.

L'écriture de l'équation de Schrödinger comme le flot d'un champ vectoriel relié à l'observable Hamiltonien est une découverte intéressante de ce mémoire. Cette constatation est un argument en faveur de notre considération des observables comme champs vectoriels puisque l'équation de Schrödinger ainsi définie est invariante sous changement de carte, même si celui-ci est non linéaire.

En adoptant l'hypothèse que notre formalisme s'adapte bien à la mécanique quantique, d'autres questions apparaissent. Peut-on parler de courbure pour cette variété ? Que représenterait-elle physiquement ? Que représenterait le transport parallèle ? Toutes ces interrogations restent ouvertes.

Finalement, nous attirons l'attention sur un point important. Nous nous sommes personnellement attelés à une tentative d'application des variétés à la mécanique quantique. Mais il est tout à fait pensable que d'autres applications plus efficaces existent et puissent être explorées. La direction que nous avons choisie n'est pas forcément optimale en vue de géométriser la mécanique quantique : une autre solution pourrait être de considérer un fibré vectoriel dont l'espace de base serait l'espace-temps de la relativité générale et la fibre, l'espace de Hilbert de la mécanique quantique. Cette nouvelle voie semble très intéressante dans le but de relier relativité générale et mécanique quantique. Nous ne l'avons toutefois pas développée car elle ne fait pas intervenir de variété hilbertienne, sujet principal de ce mémoire. Une deuxième direction potentiellement prometteuse serait de considérer comme espace de Hilbert les champs vectoriels de carré intégrable sur la variété espace-temps au lieu des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}^3$. Mais, de la même manière, cette piste n'a pas été explorée car elle ne semblait pas en lien direct avec les variétés hilbertiennes.

En résumé, les variétés hilbertiennes sont des objets mathématiques bien définis mais difficilement manipulables. Le calcul différentiel en dimension infinie n'est pas aisé et mène à des formules où se côtoient de nombreuses séries. Une étude plus approfondie du calcul tensoriel en dimension infinie serait intéressante afin d'en analyser l'utilisabilité. A titre de comparaison, Einstein s'est retrouvé bloqué dans le développement de sa théorie de la relativité générale à cause d'un manque de connaissances du calcul tensoriel sur les variétés riemanniennes. C'est une collaboration avec M. Grossmann, professeur de mathématiques à l'institut polytechnique de Zurich, qui lui a permis de débloquer la situation grâce à son apport important en mathématiques (voir [18]). Cette histoire montre l'importance du développement du calcul tensoriel en géométrie différentielle même si celui-ci est antérieur à son application physique. Les variétés hilbertiennes sont utilisées dans certaines branches des mathématiques telles que les espaces des lacets ou les groupes de Lie. Peut-être qu'un jour le calcul tensoriel en dimension infinie se révèlera utile en physique ou dans un autre domaine des mathématiques. C'est pourquoi l'étude des variétés hilbertiennes développée dans le Chapitre 3 est importante, indépendamment de son application présentée dans le Chapitre 4.

En conclusion, et au vu de cette expérience personnelle concrète, nous sommes persuadés que l'application physique d'un concept mathématique n'est pas un but en soi. Mettre en évidence un application avérée est bien entendu gratifiant, mais ne pas y parvenir n'est pas dénué d'intérêt puisque cela permet d'appréhender de manière tangible les rigidités et incompatibilités profondes des différentes théories physiques et mathématiques.

Bibliographie

[1] Abraham, R., Marsden, J.E., Ratiu, T., *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1983

[2] Arnold, V., *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Annales de l'institut Fourier, tome 16, Grenoble, 1966

[3] Chern, S.S., et al., *Lectures on Differential Geometry*, World Scientific, Singapore, 2000

[4] Debnath, L., Mikusinski, P., *Hilbert spaces with applications*, 3rd edition, Elsevier Academic Press, San Diego, USA, 2005

[5] Eells, J., *A setting for global analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 72, 1966

[6] Füzfa, A., *Géométrie Différentielle*, notes du cours SMATB214, UNamur, Namur, 2012-2013

[7] Klingenberg, W.P.A., *Riemannian Geometry*, 2nd edition, Walter de Gruyter, Berlin, Germany, 1995

[8] Kriegl, A., Michor, P.W., *The Convenient Setting of Global Analysis*, American Mathematical Society, USA, 1997

[9] Lang, S., *Differential and Riemannian Manifolds*, Springer-Verlag, New York, USA, 1995

[10] Lang, S., *Introduction to Differentiable Manifolds*, Interscience, New York, USA, 1962

[11] Laugwitz, D., *Bernhard Riemann 1826-1866 : Turning Points in the Conception of Mathematics*, Birkaüser, Basel, 1999

[12] Meier, L., *Hilbert Manifold - Definition*, Bulletin of the Manifold Atlas - definition, 2014 (disponible à la page http ://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Hilbert_manifold, consultée le 21/05/16).

[13] Michal, A.D., *General Differential Geometries and Related Topics*, Bull. Amer. Math. Soc. 45, 1939

[14] Nakahara, M., *Geometry, Topology and Physics*, 2nd edition, Institute of Physics Publishing, Bristol, UK, 2003

[15] Palais, R.S., *Foundations of Global Non-Linear Analysis*, W.A. Benjamin Inc., New York, USA, 1968

[16] Palais, R.S., *Morse Theory on Hilbert Manifolds*, Topology 2, Elsevier, 1963

[17] Perrin, D., *Les géométries non euclidiennes*, notes de conférence au Lycée de Romilly, France, 2009
(pdf disponible à la page http ://www.math.u-psud.fr/ perrin/Conferences/Romilly.pdf, consultée le 13/05/16).

[18] Renn, J., *The Genesis of General Relativity*, Vol. 2, Springer, 2007

[19] Scholz, E., *The concept of manifold, 1850–1950, History of topology* North-Holland, Amsterdam, 1999

[20] Winkin, J., *Calcul Différentiel et Intégral I*, notes du cours SMATB103, UNamur, Namur, 2011-2012

[21] Winkin, J., *Analyse Fonctionnelle*, notes du cours SMATB301, UNamur, Namur, 2013-2014